



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

## Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

## À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>







OEA

Nouvelles



NOUVELLES ANNALES  
DE  
MATHÉMATIQUES.

---

✓  
*DEUXIÈME SÉRIE.*

1881.



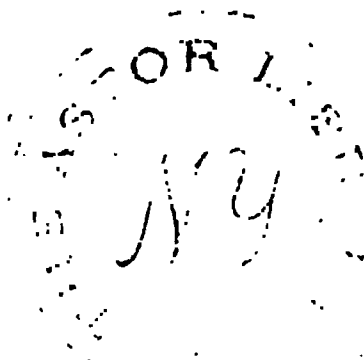




THE NEW YORK  
PUBLIC LIBRARY

65047

ASTOR, LENOX AND  
TILDEN FOUNDATIONS.  
1897.





Il nous a paru intéressant de donner à ce propos une solution du problème suivant, qui a été proposé par M. Joseph Bertrand <sup>(1)</sup>:

*Combien y a-t-il en tout de dérangements dans le tableau des permutations des  $n$  premiers nombres ?*

Désignant ce nombre total par  $D_n$ , on a évidemment

$$D_1 = 0.$$

Les permutations des deux premiers nombres sont 12, 21. La première n'offre pas de dérangement; la seconde en offre un; donc

$$D_2 = 1.$$

Pour calculer  $D_3$ , écrivons trois fois les permutations des deux premiers nombres. Mettons un point à la suite de chacune des deux permutations et faisons-le avancer successivement :

$$\begin{array}{ll} 12. & 21. \\ 1.2 & 2.1 \\ .12 & .21 \end{array}$$

Remplaçons le point par le chiffre 3. Si nous mettons ce chiffre à la fin de la permutation, il n'y a pas de dérangement. Lorsque nous le mettons au deuxième rang, nous introduisons un dérangement et un seul. Lorsque le chiffre 3 arrive au premier rang, nous introduisons deux dérangements. Donc, en désignant généralement par  $P_n$  le nombre des permutations de  $n$  nombres, nous obtenons  $0 + 1 + 2$  dérangements pour trois permutations de deux nombres, ou  $3P_2$ , et, en ajoutant les dérangements provenant du tableau des permutations

---

<sup>(1)</sup> *Traité d'Algèbre*, 1<sup>re</sup> édition, p. 146; II<sup>e</sup> Partie, 6<sup>e</sup> édition, p. 53.

des deux premiers nombres, ou  $3D_2$ , nous avons

$$D_3 = 3D_2 + (1 + 2)P_2.$$

Pour calculer  $D_4$ , supposons formé le tableau des permutations des trois premiers nombres. Écrivons-le quatre fois, en intercalant un point, comme précédemment. Le nombre des dérangements,  $D_3$ , sera quatre fois dans le tableau :  $4D_3$ . Au lieu du point écrivons le chiffre 4. Quand le point est à la fin, point de dérangement; quand il est au troisième rang, nous introduisons un dérangement; quand il est au deuxième rang, nous introduisons deux dérangements; quand il est au premier rang, nous introduisons trois dérangements. En somme, nous introduisons pour six permutations de trois nombres, ou  $(1 + 2 + 3)P_3$ , 0 + 1 + 2 + 3 dérangements, et, en ajoutant  $4D_3$ , nous avons

$$D_4 = 4D_3 + (1 + 2 + 3)P_3.$$

De même,

$$D_5 = 5D_4 + (1 + 2 + 3 + 4)P_4.$$

Généralement,

$$D_{n+1} = (n + 1)D_n + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)P_n$$

ou

$$D_{n+1} = (n + 1)D_n + \frac{n(n + 1)}{2} P_n.$$

En divisant cette dernière équation par  $(n + 1)P_n = P_{n+1}$ , il vient

$$\frac{D_{n+1}}{P_{n+1}} = \frac{D_n}{P_n} + \frac{n}{2},$$

et, en remplaçant successivement dans cette formule  $n$

par 1, 2, 3, . . . ,

$$\frac{D_2}{P_2} = \frac{D_1}{P_1} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{D_3}{P_3} = \frac{D_2}{P_2} + \frac{2}{2},$$

$$\frac{D_4}{P_4} = \frac{D_3}{P_3} + \frac{3}{2},$$

.....

$$\frac{D_n}{P_n} = \frac{D_{n-1}}{P_{n-1}} + \frac{n-1}{2}.$$

Si nous additionnons membre à membre ces différentes équations, il vient, puisque  $D_1 = 0$ ,

$$\frac{D_n}{P_n} = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)}{2}$$

ou

$$D_n = \frac{P_n [n(n-1)]}{4} = \frac{P_n C_n^2}{2}.$$

*Ainsi, le nombre total des dérangements est égal à la moitié du produit du nombre des permutations par le nombre des combinaisons des  $n$  nombres deux à deux.*

*Autre démonstration.* — Considérons une permutation quelconque  $P_n$ ; écrivons à côté la permutation renversée : à un dérangement de la première dans une combinaison de deux nombres correspond un non-dérangement de la seconde. Donc, si l'on écrit le tableau des permutations de  $n$  nombres, puis à côté le tableau des permutations dans l'ordre renversé, le nombre des dérangements dans le premier tableau est égal au nombre des non-dérangements du second, et réciproquement. Mais, dans chacune des permutations du premier et du second tableau, le nombre des dérangements et des non-dérangements est égal au nombre des combinaisons



de  $n$  objets pris deux à deux, ou  $C_n^2$ ; par suite, le nombre total des dérangements ou des non-dérangements est égal à  $P_n C_n^2$ . Mais le nombre des dérangements de l'un égale le nombre des non-dérangements de l'autre, et inversement; donc

$$D_n = \frac{P_n C_n^2}{2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

## SUR LA DÉFORMATION DU CACHE-POT;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le cache-pot est formé de fils de fer ou de baguettes rectilignes articulées en chacun de leurs points de rencontre. Il présente la forme générale d'un hyperboloïde à une nappe; les baguettes sont des génératrices rectilignes de chacun des deux systèmes.

M. Cayley a démontré que, si l'on déforme ce modèle d'hyperboloïde, on obtient un hyperboloïde homofocal au premier, en superposant les directions des axes. En effet, soit l'hyperboloïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

considérons deux points P et Q de cet hyperboloïde et désignons leurs coordonnées par  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$ . Posons

$$\begin{aligned} x_1 &= a\alpha_1, & y_1 &= b\beta_1, & z_1 &= c\gamma_1, \\ x_2 &= a\alpha_2, & y_2 &= b\beta_2, & z_2 &= c\gamma_2; \end{aligned}$$

nous aurons les équations

$$(1) \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 = 1,$$

$$(2) \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 = 1.$$

De plus, si les deux points P et Q sont sur une même génératrice, en exprimant que le plan tangent en P contient le point Q, on aura

$$(3) \quad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 = 1.$$

La distance  $\delta$  des points P et Q est fournie par l'expression

$$\delta^2 = a^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + b^2(\beta_1^2 - \beta_2^2) + c^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Considérons un second hyperboloïde ayant même centre, mêmes directions d'axes que le premier, et pour longueurs de ses axes des quantités  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  telles que

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2 = \lambda.$$

Désignons par P' et Q' les points correspondant à P et Q, c'est-à-dire ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} x'_1 &= a'\alpha_1, & y'_1 &= b'\beta_1, & z'_1 &= c'\gamma_1, \\ x'_2 &= a'\alpha_2, & y'_2 &= b'\beta_2, & z'_2 &= c'\gamma_2. \end{aligned}$$

La relation (3) étant vérifiée, les points P' et Q' appartiennent à la même génératrice; de plus, en désignant par  $\delta'$  la distance P'Q', nous aurons

$$\delta'^2 = a'^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + b'^2(\beta_1^2 - \beta_2^2) + c'^2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Par suite,

$$\frac{\delta'^2 - \delta^2}{\lambda} = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + (\beta_1^2 - \beta_2^2) - (\gamma_1^2 - \gamma_2^2).$$

Mais, en retranchant (2) de (1), on voit que le second membre de la relation précédente est nul; donc  $P'Q' = PQ$ .

Donc, si l'on considère sur le premier hyperboloïde un quadrilatère PQRS et sur le second hyperboloïde, obtenu par la déformation du premier, le quadrilatère P'Q'R'S', formé par les points P', Q', R', S' correspon-

dant à P, Q, R, S, ce quadrilatère est tel que

$$P'Q' = PQ, \quad Q'R' = QR, \quad R'S' = RS, \quad S'P' = SP.$$

Il en résulte que tout quadrilatère gauche PQRS peut se déformer sans changer la longueur des côtés suivant le quadrilatère correspondant de l'hyperboloïde homofocal.

C. Q. F. D.

## CONSTRUCTION DE LA PARABOLE OSCULATRICE EN UN POINT D'UNE COURBE;

PAR M. G. KOENIGS,

Élève à l'École Normale supérieure.

Je m'appuierai sur le théorème suivant, qui est bien connu :

*Le rayon de courbure dans la parabole est égal au double du segment compté sur la normale à partir de son pied jusqu'au point où elle rencontre la directrice.*

Soient M un point d'une courbe, MT la tangente et C le centre de courbure; menons une corde  $mn$  parallèle à la tangente et rencontrant la courbe aux points  $m$  et  $n$ , voisins du point M; considérons la parabole effective qui passe par les points  $m$  et  $n$ , et qui est tangente en M à MT. I désignant le milieu de  $mn$ , MI est le diamètre de cette parabole conjugué de la direction de cordes MT. Cela posé, faisons tendre  $mn$  vers MT, la parabole tend à se confondre avec la parabole osculatrice, et MI tend vers la tangente MP au point M à la courbe lieu du point I.

Ainsi :

*Le diamètre de la parabole osculatrice en M, conjugué de la tangente MT, est la tangente au point M à*

*la courbe lieu des points milieux des cordes parallèles à MT.*

D'ailleurs, si, sur la normale et en sens inverse de MC, nous portons une longueur  $MD = \frac{1}{2}MC$ , nous obtenons en D un point de la directrice : la perpendiculaire DH abaissée sur MP est donc cette directrice.

On aura le foyer F en cherchant sur le cercle de centre M et tangent à DH un point tel que les angles CMP et CMF soient égaux.

---

**SOLUTION GÉOMÉTRIQUE D'UNE QUESTION PROPOSÉE EN 1879  
AU CONCOURS D'AGRÉGATION POUR L'ENSEIGNEMENT SE-  
CONDAIRE SPÉCIAL ;**

PAR M. LÉONCE LEBRUN,  
Élève au Prytanée militaire de La Flèche.

---

*Trouver la perspective d'une hélice, le tableau étant*

*perpendiculaire à son axe et le point de vue S étant sur cet axe.*

La perspective d'un point  $M$  se trouve sur le rayon visuel  $MS$ , dans le plan du tableau et dans le plan diamétral du cylindre passant par  $M$ . Ce sera donc  $M'$ .

La tangente à la courbe perspective sera l'intersection du plan du tableau avec le plan tangent au cône le long de la génératrice  $MS$ . Cette tangente en  $M'$  passe donc par la trace de la tangente à l'hélice en  $M$  sur le plan du tableau. Ce sera donc  $M'T$ .

Joignons  $M'T$  et prolongeons jusqu'à la rencontre avec la parallèle à  $AT$  menée par  $O$ , c'est-à-dire jusqu'en  $R$ ; je vais démontrer que  $OR = \text{const.}$

Les deux triangles  $M'OR$  et  $M'AT$  sont semblables et donnent

$$\frac{OR}{AT} = \frac{OM'}{AM'}.$$

Les deux triangles  $M'AM$  et  $M'OS$  donnent de même

$$\frac{OM'}{AM'} = \frac{OS}{AM}.$$

Donc

$$OR = OS \frac{AT}{AM}.$$

Mais, puisque  $M$  est un point de l'hélice,

$$\frac{AT}{AM} = \text{const.};$$

donc  $OR$  est constant.

Mais remarquons que  $OR$  est la sous-tangente de la perspective de l'hélice au point  $M'$  si  $O$  est le pôle, car  $R$  est le point de rencontre de la tangente avec la perpendiculaire au rayon vecteur menée par  $O$ .

La perspective est donc une courbe telle que sa sous-tangente est constante : c'est donc une spirale d'Archimède.



**SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE EN 1876 AU CON—  
COURS ENTRE LES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES  
DE L'ACADÉMIE DE DOUAI ;**

PAR M. A. HILAIRE,  
Professeur au lycée de Douai.

*A, B, C, D étant les pieds des quatre normales à une ellipse donnée, issues d'un même point P, on suppose que le point P se déplace de manière que la corde AB conserve une direction constante, et on demande le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD.*

Soient  $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$  l'équation de l'ellipse donnée,  $y - mx - n = 0$  l'équation de la droite AB dans une de ses positions; la droite CD, si elle était indépendante de AB, aurait une équation de la forme  $px + qy + r = 0$ , et, en admettant que  $p, q, r$  contiennent implicitement un même facteur indéterminé, l'équation

$$(1) \quad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 + (y - mx - n)(px + qy + r) = 0$$

représenterait une conique *quelconque* passant par les quatre points A, B, C, D. Pour avoir l'équation véritable de CD, j'exprime que la conique (1) se confond avec l'hyperbole équilatère qui doit contenir les pieds des quatre normales : il suffit d'écrire que dans l'équation (1) les coefficients de  $x^2$  et de  $y^2$  sont nuls, ainsi que le terme indépendant.

J'ai ainsi

$$a^2 + q = 0, \quad \text{d'où} \quad q = -a^2,$$

$$b^2 - mp = 0, \quad p = \frac{b^2}{m},$$

$$a^2 b^2 + nr = 0, \quad r = -\frac{a^2 b^2}{n}.$$

L'équation de CD est donc

$$\frac{b^2}{m} x - a^2 y - \frac{a^2 b^2}{n} = 0.$$

C' et D' étant les points symétriques de C et D par rapport au centre de l'ellipse, la figure CDC'D' est un parallélogramme concentrique à l'ellipse, et, d'après le théorème de Joachimsthal, les cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD passent respectivement par les points D' et C'.

Or il est facile d'avoir l'équation du système des parallèles CD, DC'.

En effet, l'équation du système des parallèles CD, C'D' étant évidemment

$$\left( \frac{b^2}{m} x - a^2 y \right)^2 - \frac{a^4 b^4}{n^2} = 0,$$

l'équation générale des coniques passant par les points de rencontre de l'ellipse et de ce premier système est

$$(2) \quad \lambda(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2) - \left[ \left( \frac{b^2}{m} x - a^2 y \right)^2 - \frac{a^4 b^4}{n^2} \right] = 0.$$

J'écris la condition pour avoir une conique du genre parabole :

$$\frac{a^4 b^4}{m^2} + (a^4 - \lambda a^2) \left( \lambda b^2 - \frac{b^4}{m^2} \right) = 0$$

ou

$$- \lambda^2 a^2 b^2 + \lambda \left( a^4 b^2 + \frac{a^2 b^4}{m^2} \right) = 0.$$

Cette condition se dédouble en  $\lambda = 0$ , qui donne le système CD, C'D', et  $\lambda = a^2 + \frac{b^2}{m^2}$ , qui correspond au système CD', DC'.

On a donc, pour équation de ce dernier système,

$$\begin{aligned} & \left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right)(a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2) \\ & \quad - \left[\left(\frac{b^2}{m} x - a^2 y\right)^2 - \frac{a^4 b^4}{n^2}\right] = 0, \\ & \frac{b^2 a^2}{m^2} y^2 + a^2 b^2 x^2 + 2 \frac{a^2 b^2}{m} xy + \frac{a^4 b^4}{n^2} - a^2 b^2 \left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

ou, en divisant tout par  $a^2 b^2$ ,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{y}{m} + x\right)^2 + \frac{a^2 b^2}{n^2} - \left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) = 0, \\ & \left(\frac{y}{m} + x\right)^2 - \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) - \frac{a^2 b^2}{n^2}\right] = 0, \\ & (y + mx)^2 - m^2 \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) - \frac{a^2 b^2}{n^2}\right] = 0, \end{aligned}$$

ou, en posant

$$\begin{aligned} (3) \quad n'^2 &= m^2 \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) - \frac{a^2 b^2}{n^2}\right], \\ (y + mx)^2 - n'^2 &= 0. \end{aligned}$$

D'après cela, l'équation générale des coniques circonscrites à l'un des quadrilatères ABCD' ou ABDC' est

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 + \mu(y - mx - n)(y + mx \pm n') = 0.$$

Cette équation représentera un cercle, puisqu'il n'y a pas de terme en  $xy$ , si  $a^2 + \mu = b^2 - \mu m^2$ , d'où  $\mu = -\frac{c^2}{1 + m^2}$ . On remplacera  $\mu$  par sa valeur et l'équation ne contiendra plus que les indéterminées  $n$  et  $n'$ . Représentons-la par

$$(4) \quad f(x, y) = 0.$$

Le centre est donné par les deux équations

$$(5) \quad f'(x) = 0,$$

$$(6) \quad f'(y) = 0,$$

qui contiendront aussi les indéterminées  $n$  et  $n'$ ; donc, pour avoir l'équation du lieu, il n'y a qu'à éliminer  $n$  et  $n'$  entre les équations (5) et (6) et la relation (3).

L'élimination est immédiate, car les équations (5) et (6) ne contiennent  $n$  et  $n'$  qu'au premier degré.

## SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1878;

PAR M. CARLOS MICHAUX,

Élève du lycée de Douai (classe de M. Guillot).

*Les droites A'OA, B'OB, C'OC sont trois axes de coordonnées rectangulaires; on suppose OA' = OA = a, OB' = OB = b, OC' = OC = c.*

*Déterminer: 1° le lieu des axes de révolution des surfaces de révolution du second degré qui passent par les six points A', A, B', B, C', C; 2° le lieu des extrémités D de ces axes.*

*On construira la projection du lieu du point D sur le plan AOB, en supposant  $a > c > b$ , et l'on partagera la courbe en arcs tels, que chacun d'eux corresponde à des surfaces de même espèce.*

L'équation générale des surfaces du second degré passant par les six points A', A, B', B, C', C est, en suppo-

sant le terme indépendant différent de zéro,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2B yz + 2B' xz + 2B'' xy - 1 = 0.$$

Lorsque la surface est de révolution, l'équation

$$\left(\frac{1}{a^2} - S\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - S\right)y^2 + \left(\frac{1}{c^2} - S\right)z^2 + 2B yz + 2B' xz + 2B'' xy = 0,$$

qui donne les plans cycliques, devient l'une des équations

$$\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} - S}x \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} - S}y \pm \sqrt{\frac{1}{c^2} - S}z\right)^2 = 0.$$

Ces équations représentent les plans principaux parallèles aux axes des surfaces considérées : les axes seront donc donnés par les équations

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - S}} = \frac{y}{\pm \sqrt{\frac{1}{b^2} - S}} = \frac{z}{\pm \sqrt{\frac{1}{c^2} - S}}$$

ou

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2} - S} = \frac{y^2}{\frac{1}{b^2} - S} = \frac{z^2}{\frac{1}{c^2} - S}.$$

En éliminant la variable  $S$ , on obtiendra facilement le lieu des axes :

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0.$$

C'est un cône du second degré rapporté à ses axes et sur lequel on peut placer un trièdre trirectangle.

Les sommets se trouvant à l'intersection de l'axe et



de la surface, les coordonnées de ses points doivent satisfaire aux équations

$$(1) \quad \frac{x^2}{\frac{1}{a^2} - S} = \frac{y^2}{\frac{1}{b^2} - S} = \frac{z^2}{\frac{1}{c^2} - S} = \frac{l^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 3S},$$

$l^2$  représentant le carré de la demi-longueur de l'axe.

Mais,  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$  étant un invariant, on a

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{l^2} + 2S,$$

puisque  $S$  est l'inverse du carré du rayon du parallèle dont le plan passe par le centre.

En tenant compte de cette relation, les équations (1) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\frac{1}{a^2} - S} &= \frac{y^2}{\frac{1}{b^2} - S} = \frac{z^2}{\frac{1}{c^2} - S} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 2S\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 3S\right)}. \end{aligned}$$

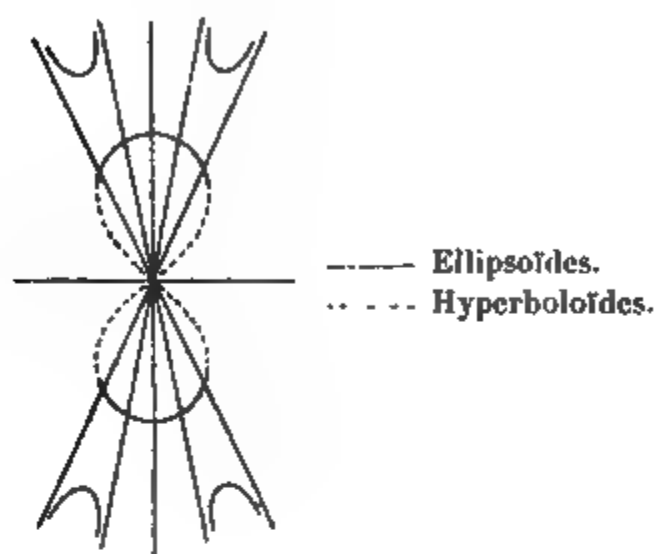
En éliminant  $S$ , on obtiendrait aisément les équations du lieu; mais il est préférable de construire immédiatement la projection sur le plan des  $xy$ , au moyen de la variable auxiliaire  $S$ .

Pour partager en arcs correspondant à des surfaces de même espèce, nous remarquons d'abord que des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à deux nappes peuvent seuls donner des points réels; nous distinguerons ces deux surfaces par le signe de  $S$ ,  $S$  étant négatif pour des hyperboloïdes et positifs pour des ellipsoïdes, puisque le parallèle dont le plan passe par le centre est imaginaire dans le premier cas et réel dans le second.

On construit facilement les deux courbes que l'on obtient en supposant

$$1^{\circ} \quad \frac{2}{b^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}.$$

$$2^{\circ} \quad \frac{2}{b^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}.$$



*Note.* — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

## SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879;

PAR M. J. GRIESS.

Maître répétiteur au lycée d'Alger.

*On donne un hyperboloïde. Par un point P pris dans le plan de l'ellipse de gorge on mène une parallèle à une génératrice quelconque, et l'on considère le cylindre de révolution qui aurait pour axe cette parallèle et passerait par la génératrice. Ce cylindre coupe l'hyperboloïde suivant une courbe qui se projette sur le plan horizontal suivant une courbe du troisième degré. Cette courbe du troisième degré possède un point double dont on demande le lieu.*

Soient  $\alpha, \beta$  les coordonnées du point P par rapport au centre de l'hyperboloïde. L'équation de l'hyperboloïde étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les équations d'une génératrice quelconque sont

$$G \quad \begin{cases} \frac{x}{a} = \sin \varphi - \frac{z}{c} \cos \varphi, \\ \frac{y}{b} = \cos \varphi + \frac{z}{c} \sin \varphi. \end{cases}$$

Prenons le point P pour origine; ces équations deviennent

$$\frac{(x + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y + \beta)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 = 0,$$

$$\frac{x + \alpha}{a} = \sin \varphi - \frac{z}{c} \cos \varphi,$$

$$\frac{y + \beta}{b} = \cos \varphi + \frac{z}{c} \sin \varphi,$$

Les équations d'une parallèle menée par P sont

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c} \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \sin \varphi.$$

ou

$$\frac{x}{-a \cos \varphi} = \frac{y}{b \sin \varphi} = \frac{z}{c}.$$

Pour former l'équation du cylindre, prenons une sphère dont le centre est l'origine

$$x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0,$$

et écrivons l'équation du cylindre circonscrit suivant le plan diamétral perpendiculaire à la génératrice. L'équation de ce plan est

$$-ax \cos \varphi + by \sin \varphi + cz = 0,$$

et celle du cylindre sera

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2)(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2) - (ax \cos \varphi - by \sin \varphi - cz)^2 = 0.$$

Le rayon  $\rho$  de cette sphère sera la distance du point P à la génératrice de l'hyperboloïde. Or, la distance d'un point  $(x, y, z)$  à la droite

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

est donnée par la formule

$$\frac{(x - az - p)^2 + (y - bz - q)^2 + [b(x - p) - a(y - q)]^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Comme P est l'origine, cette formule se réduit à

$$\frac{p^2 + q^2 + (bp - aq)^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

En mettant les équations de G sous la forme

$$x = a \sin \varphi - \alpha - \frac{a}{c} \cos \varphi \cdot z,$$

$$y = b \cos \varphi - \beta + \frac{b}{c} \sin \varphi \cdot z,$$

l'expression de  $\rho^2$  sera donc

$$\begin{aligned} \rho^2 = & \frac{(a \sin \varphi - \alpha)^2 + (b \cos \varphi - \beta)^2 + \left[ \frac{b}{c} \sin \varphi (a \sin \varphi - \alpha) - \frac{a}{c} \cos \varphi (b \cos \varphi - \beta) \right]^2}{\frac{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}{c^2} + 1} \\ = & \frac{c^2 [(a \sin \varphi - \alpha)^2 + (b \cos \varphi - \beta)^2] + [b \sin \varphi (a \sin \varphi - \alpha) - a \cos \varphi (b \cos \varphi - \beta)]^2}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2} \\ = & \frac{c^2 [(a \sin \varphi - \alpha)^2 + (b \cos \varphi - \beta)^2] + (ab - b\alpha \sin \varphi - a\beta \cos \varphi)^2}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2}. \end{aligned}$$

Le point double étant la projection de deux points de la courbe situés sur la même verticale, il est clair que le milieu de cette corde appartiendra aux deux plans diamétraux conjugués des cordes verticales dans les deux

surfaces. Dans l'hyperboloïde, ce plan diamétral est le plan de l'ellipse de gorge. Dans le cylindre, il sera donné par l'équation  $f'_z = 0$ . Il est clair que dans le cas actuel l'intersection des deux plans, étant située dans le plan de projection, ira passer par le point double.

On a

$$f'_z = z(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2) + 2c(ax \cos \varphi - by \sin \varphi - cz) = 0.$$

En faisant dans cette équation  $z = 0$ , on aura la droite cherchée : c'est

$$ax \cos \varphi = by \sin \varphi.$$

On voit qu'elle est perpendiculaire à la projection de la génératrice donnée.

Concevons maintenant qu'en tous les points de cette droite nous élevions des perpendiculaires ; quand nous arriverons au point double, la perpendiculaire correspondante rencontrera les deux surfaces en deux points communs, situés d'ailleurs symétriquement par rapport au plan des  $xy$ . Les équations aux  $z$  des points d'intersection de cette perpendiculaire avec les deux surfaces devront donc avoir les mêmes racines. C'est en écrivant cette condition que nous aurons le lieu.

Une perpendiculaire au plan des  $xy$  en un point de la droite

$$\frac{x}{b \sin \varphi} = \frac{y}{a \cos \varphi}$$

a pour équations

$$\frac{x}{b \sin \varphi} = \frac{y}{a \cos \varphi} = \lambda,$$

$\lambda$  variant à mesure que le point se déplace sur la droite. On tire de là

$$x = b\lambda \sin \varphi, \quad y = a\lambda \cos \varphi.$$

Remplaçant  $x$  et  $y$  par ces valeurs, l'équation de l'hyper-

boloïde devient

$$z^2 = c^2 \left[ \frac{(b\lambda \sin \varphi + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(a\lambda \cos \varphi + \beta)^2}{b^2} - 1 \right].$$

Portant ces mêmes valeurs dans l'équation du cylindre, il vient

$$\begin{aligned} & (b^2 \lambda^2 \sin^2 \varphi + a^2 \lambda^2 \cos^2 \varphi + z^2 - \rho^2) \\ & \times (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2) \\ & - (ab\lambda \sin \varphi \cos \varphi - ab\lambda \sin \varphi \cos \varphi - cz)^2 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & z^2(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \\ & = \rho^2(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2) \\ & - \lambda^2(b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi)(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} & \rho^2(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2) \\ & = c^2[(a \sin \varphi - \alpha)^2 + (b \cos \varphi - \beta)^2] \\ & + (b\alpha \sin \varphi + a\beta \cos \varphi - ab)^2. \end{aligned}$$

Remplaçant et écrivant que les deux valeurs de  $z^2$  sont égales, il vient

$$\begin{aligned} & c^2 \left[ \frac{(b\lambda \sin \varphi + \alpha)^2}{a^2} + \frac{(a\lambda \cos \varphi + \beta)^2}{b^2} - 1 \right] \\ & = \frac{c^2[(a \sin \varphi - \alpha)^2 + (b \cos \varphi - \beta)^2] + (a\beta \cos \varphi + b\alpha \sin \varphi - ab)}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \\ & - \lambda^2(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2). \end{aligned}$$

Cette équation est du deuxième degré en  $\lambda$ . Il semble donc que sur chaque droite d'intersection des plans diamétraux il y ait deux points doubles, ce qui est impossible dans une courbe du troisième degré.

Or, considérons le point A, projection du point P sur la projection horizontale G' de la génératrice. Si en ce point j'élève une perpendiculaire, cette perpendiculaire rencontre la génératrice G et sa symétrique en deux points qui sont aussi situés sur le cylindre. Donc une

des valeurs de  $\lambda$  correspond au point A et l'autre correspond au point double. Nous pouvons trouver la valeur de  $\lambda$  relative au point A. Ce point est, en effet, défini par les équations

$$\frac{x}{b \sin \varphi} = \frac{y}{a \cos \varphi},$$

$$\frac{(x + \alpha) \sin \varphi}{a} + \frac{(y + \beta) \cos \varphi}{b} = 1.$$

En écrivant que le point d'intersection de ces deux droites satisfait aux équations

$$\frac{x}{b \sin \varphi} = \frac{y}{a \cos \varphi} = \lambda,$$

nous aurons la valeur de  $\lambda$ . En éliminant  $x$  et  $y$  entre ces deux dernières et la seconde des premières, on a

$$\frac{(b\lambda \sin \varphi + \alpha) \sin \varphi}{a} + \frac{(a\lambda \cos \varphi + \beta) \cos \varphi}{b} = 1,$$

$$\lambda(b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi) = ab - b\alpha \sin \varphi - a\beta \cos \varphi,$$

$$\lambda = \frac{ab - b\alpha \sin \varphi - a\beta \cos \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Si donc nous retranchons cette valeur de la somme  $\lambda' + \lambda''$  fournie par l'équation du second degré, il nous restera la valeur de  $\lambda$  relative au point double. Cette équation du second degré s'écrit

$$\frac{1}{2}(a^4 b^2 \cos^2 \varphi + b^4 a^2 \sin^2 \varphi + b^4 c^2 \sin^2 \varphi + a^4 c^2 \cos^2 \varphi + a^2 b^2 c^2) \\ - 2\lambda c^2 \left( \frac{b\alpha \sin \varphi}{a^2} + \frac{a\beta \cos \varphi}{b^2} \right) + \dots$$

valeur cherchée est donc

$$= - \frac{2c^2(b^3 \alpha \sin \varphi + a^3 \beta \cos \varphi)}{a^2 b^2(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) + c^2(a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi + a^2 b^2)} \\ - \frac{ab - b\alpha \sin \varphi - a\beta \cos \varphi}{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}.$$

Il suffit maintenant, pour trouver l'équation du lieu, d'éliminer  $\lambda$  et  $\varphi$  entre cette équation et les équations

$$\frac{x}{b \sin \varphi} = \frac{y}{a \cos \varphi} = \lambda.$$

On tire de ces dernières

$$\frac{\frac{x}{b}}{\sin \varphi} = \frac{\frac{y}{a}}{\cos \varphi} = \lambda = \sqrt{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}} = \frac{1}{ab} \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}.$$

En posant

$$\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} = k,$$

on a

$$\lambda = \frac{k}{ab}, \quad \sin \varphi = \frac{ax}{k}, \quad \cos \varphi = \frac{by}{k}.$$

En substituant dans la valeur de  $\lambda$ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{k}{ab} + \frac{2c^2 \left( b^3 x \frac{ax}{k} + a^3 y \frac{by}{k} \right)}{\frac{a^4 b^4}{k^2} (x^2 + y^2) + c^2 \frac{a^2 b^2}{k^2} (b^2 x^2 + a^2 y^2) + a^2 b^2 c^2} \\ + \frac{ab - bx \frac{ax}{k} - ay \frac{by}{k}}{\frac{a^2 b^2}{k^2} (x^2 + y^2)} = \end{aligned}$$

Multiplions par  $\frac{ab}{k}$  et divisons haut et bas par  $ab$ ,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2c^2 (b^2 x x + a^2 y y)}{a^2 b^2 (x^2 + y^2) + c^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2) + c^2 k^2} \\ + \frac{k - ax - by}{x^2 + y^2} = 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) (x^2 + y^2) + 2c^2 (b^2 x x + a^2 y y) \\ - (ax + by) (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \\ + (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) k = 0. \end{aligned}$$



Faisons passer  $k$  dans le second membre, élevons au carré et divisons par  $(a^2 b^2 c^2)^2$ ; il vient

$$\left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) (x^2 + y^2) + \alpha x \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) + \beta y \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) \Big]^2 \\ = \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2).$$

C'est une courbe du quatrième degré possédant un point double à l'origine.

*Note.* — La même question a été résolue par M. A. Leinekugel.

## SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE EN 1879, POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE;

PAR M. J. GRIESS,

Maître répétiteur au lycée d'Alger.

*Étant donné un tétraèdre OABC défini par l'angle trièdre O et les longueurs  $4a$ ,  $4b$ ,  $4c$  des trois arêtes OA, OB, OC :*

*1° Démontrer que l'ellipsoïde qui admet pour diamètres conjugués les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées deux à deux est tangent aux six arêtes du tétraèdre.*

*2° Trouver l'intersection de cet ellipsoïde et de l'hyperboloïde engendré par une droite mobile qui s'appuie sur trois droites menées l'une par le milieu de OA parallèlement à OC, la seconde par le milieu de OC parallèlement à OB et la troisième par le milieu de OB parallèlement à OA.*

*3° Par chacun des points où la droite mobile perce la surface de l'ellipsoïde, on mène un plan parallèle au plan tangent en l'autre point : démontrer que ces*

deux plans passent par le centre de l'ellipsoïde et traverser le lieu de leur intersection.

1° Soient S, P, M les milieux des arêtes OA, OB, OC et R, Q, N les milieux des arêtes BC, AC, AB (le lecteur est prié de faire la figure). Considérons l'ellipsoïde qui a pour diamètres conjugués les droites MN, PQ, RS qui se coupent en K; je dis qu'il est tangent, par exemple, à BC. En effet, le plan MPQN contient deux diamètres conjugués de RS; c'est donc son plan diamétral conjugué, et, par suite, le plan tangent en R est parallèle à MPQN. D'ailleurs, MP et QN sont parallèles à BC; BC est donc parallèle au plan diamétral conjugué de RS, et, par suite, elle est contenue dans le plan tangent en R. Donc BC est tangente à l'ellipsoïde. Remarquons que, si l'on cherche la section de cette surface par le plan ABC, ce sera une ellipse tangente aux trois côtés du triangle en leurs milieux.

Formons l'équation de l'ellipsoïde. Les équations des trois plans diamétraux sont :

$$\text{MNPQ} \dots \quad cy + bz - 2bc = 0,$$

$$\text{PQRS} \dots \quad bx + ay - 2ab = 0,$$

$$\text{MRSN} \dots \quad cx + az - 2ac = 0.$$

L'équation de l'ellipsoïde sera donc de la forme

$$\frac{(cy + bz - 2bc)^2}{x^2} + \frac{(cx + az - 2ac)^2}{y^2} + \frac{(bx + ay - 2ab)^2}{z^2} = 1.$$

Exprimons que cette surface passe par M,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 2c$ , il vient

$$4a^2b^2 = \gamma^2,$$

on aurait de même

$$4b^2c^2 = x^2, \quad 4a^2c^2 = \beta^2,$$

de sorte que l'équation devient

$$\frac{(cy + bz - 2bc)^2}{4b^2c^2} + \frac{(cx + az - 2ac)^2}{4a^2c^2} + \frac{(bx + ay - 2ab)^2}{4a^2b^2} = 1.$$

Remarquons qu'elle admet pour centre le point  $(a, b, c)$ ; transportons l'origine en ce point : l'équation devient

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 4$$

ou bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} = 2.$$

2° Menons les trois droites MR, PN, QS qui doivent être les trois directrices de l'hyperboloïde. Je remarque que la droite MQ qui rencontre MR et QS est parallèle à PN; c'est donc une génératrice du second système. Il en est de même des droites NS et PR. Remarquons que les plans tangents en M et N, P et Q, R et S sont, par conséquent, parallèles deux à deux; l'hyperboloïde a donc le même centre que l'ellipsoïde.

Cherchons la section de cet hyperboloïde par le plan ABC; elle contiendra les trois points R, Q, N. La tangente en Q est l'intersection du plan tangent en ce point avec la face ABC. Or ce plan tangent est le plan des droites MQ et QS, c'est-à-dire la face OAC. La tangente est donc AC. On verrait de même que les tangentes en R et N sont les droites BC et AB. Donc la section est l'ellipse inscrite dans ABC et tangente aux milieux des côtés.

Si l'on rapproche ce résultat de celui qu'on a obtenu pour l'ellipsoïde, on voit que les deux surfaces ont cette ellipse en commun, et par suite se pénètrent suivant

deux courbes planes. La seconde est une ellipse égale la première et symétrique par rapport au centre K. E est circonscrite au triangle MPS.

Cherchons l'équation de l'hyperboloïde. Un plan passant par MR aura pour équation

$$z - 2c + \lambda x = 0;$$

un plan passant par QS,

$$x - 2a + \lambda_1 y = 0.$$

Exprimons que la droite définie par ces deux équations rencontre PN,

$$z = 0, \quad y = 2b,$$

on trouve

$$a\lambda - b\lambda\lambda_1 - c = 0.$$

D'ailleurs,

$$\lambda = \frac{2c - z}{x}, \quad \lambda_1 = \frac{2a - x}{y};$$

on a donc

$$a \frac{2c - z}{x} - b \frac{2c - z}{x} \frac{2a - x}{y} - c = 0.$$

Transportons l'origine au centre  $a, b, c$ :

$$a(y + b)(c - z) - b(c - z)(a - x) - c(x + a)(y + b) =$$

Effectuant et divisant par  $abc$ , il vient

$$\frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} + 1 = 0.$$

Ajoutons cette équation à celle de l'ellipsoïde; il vient

$$\left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1.$$

ou

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \pm 1.$$

L'intersection se compose donc bien de deux courbes symétriques par rapport à l'origine. Pour démontrer que ce sont les ellipses circonscrites à MPS et RQN, prenons, par K, IH parallèle à OC, rencontrant en I la face ABC et en H la face OAB; on a

$$IK = \frac{IH}{2} = \frac{QS}{2} = \frac{OC}{4} = c.$$

On aurait de même, sur des parallèles menées par K aux autres axes, les longueurs  $a$  et  $b$ . L'équation du plan ABC ou RQN est donc

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Soient  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  les coordonnées des points de rencontre de l'une des génératrices de l'hyperboloïde avec l'ellipsoïde. Le plan mené par le premier point parallèlement au plan tangent au second a pour équation

$$(x - x_1)f'_{x_2} + (y - y_1)f'_{y_2} + (z - z_1)f'_{z_2} = 0.$$

La condition pour que ce plan passe par le centre est, prenant les équations rapportées à K comme origine,

$$x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} = 0$$

, en remplaçant les dérivées par leurs valeurs ( $f$  désignant le premier membre de l'équation de l'ellipsoïde),

$$\left( \frac{2x_2}{a} + \frac{y_2}{b} + \frac{z_2}{c} \right) + \frac{y_1}{b} \left( \frac{2y_2}{b} + \frac{x_2}{a} + \frac{z_2}{c} \right) + \frac{z_1}{c} \left( \frac{2z_2}{c} + \frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b} \right) = 0.$$

Remarquons que les deux points considérés appartiennent à l'intersection des deux surfaces et sont situés l'un dans le plan RQN, l'autre dans le plan PMS. On a

donc

$$(1) \quad \frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c} = 1,$$

$$(2) \quad \frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b} + \frac{z_2}{c} = -1.$$

En tenant compte de ces relations, la condition ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{x_1}{a} \left( \frac{x_2}{a} - 1 \right) + \frac{y_1}{b} \left( \frac{y_2}{b} - 1 \right) + \frac{z_1}{c} \left( \frac{z_2}{c} - 1 \right) = 0.$$

$$(3) \quad \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 1.$$

Exprimons maintenant que les deux points considérés sont sur une même génératrice de l'hyperboloïde. Pour cela, il suffira d'exprimer que le point  $(x_2, y_2, z_2)$  dans le plan tangent à l'hyperboloïde au point  $(x_1, y_1, z_1)$ . Ce dernier a pour équation

$$\frac{x}{a} \left( \frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c} \right) + \frac{y}{b} \left( \frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c} \right) + \frac{z}{c} \left( \frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} \right) + 2 = 0$$

et la condition demandée sera

$$(4) \quad \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{ab} + \frac{x_2 z_1 + x_1 z_2}{ac} + \frac{y_2 z_1 + y_1 z_2}{bc} + 2 = 0$$

Faisons maintenant le produit des équations (1) et (2)

$$\begin{aligned} \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} + \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{ab} \\ + \frac{x_2 z_1 + x_1 z_2}{ac} + \frac{y_2 z_1 + y_1 z_2}{bc} = -1. \end{aligned}$$

Tenant compte de (4), cette relation s'écrit

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 1.$$

On retrouve la condition (3). Comme celle-ci n

qu'une transformation de la relation

$$x_1 f'_{x_2} + y_1 f'_{y_2} + z_1 f'_{z_2} = 0,$$

cette dernière est elle-même vérifiée. D'ailleurs, on aura aussi, par symétrie,

$$x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} = 0.$$

Donc le second plan passe aussi par le centre.

L'intersection de ces deux plans a donc pour lieu un cône dont le sommet est au centre. Je dis que ce cône est du second degré. En effet, si nous considérons l'intersection des plans tangents en  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$ , cette intersection est la conjuguée de la génératrice qui passe par ces deux points, par rapport à l'ellipsoïde. Donc elle s'appuie constamment sur trois droites fixes qui sont les conjuguées des directrices du premier hyperboloïde, et, par conséquent, le lieu de cette droite est aussi un hyperboloïde, ayant le même centre que le premier. Le lieu cherché n'est autre chose que le cône asymptote de cet hyperboloïde.

Pour trouver son équation, prenons d'abord les équations des conjuguées des directrices primitives. Pour cela, il suffit de chercher les plans tangents aux extrémités de MR, de PN, de QS :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 4, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 4, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 4. \end{cases}$$

Une droite s'appuyant sur (1) et (3) a pour équations

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 4 + \lambda \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 0,$$

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \mu \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 4 \right) = 0.$$

Pour exprimer que cette droite rencontre la droite retranchons ses équations l'une de l'autre :

$$4 - \lambda \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) + \mu \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 4 \right) = 0.$$

Tenant compte de (2),

$$4 - 4\lambda - 4\mu = 0,$$

$$1 - \lambda - \mu = 0.$$

Éliminant  $\lambda$  et  $\mu$ ,

$$1 + \frac{\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 4}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} + \frac{\frac{y}{a} + \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 4} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 4 \right) + \left( \frac{x}{a} + \frac{z}{c} - 4 \right) \left( \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 4 \right) \\ & + \left( \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 0. \end{aligned}$$

Transportons l'origine au point  $(a, b, c)$  et effectuons il vient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{3.xz}{ac} + \frac{3.yz}{bc} + \frac{3.xy}{ab} + 4 = 0.$$

L'équation du cône est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{3.xz}{ac} + \frac{3.yz}{bc} + \frac{3.xy}{ab} = 0.$$

Il passe par l'intersection de l'ellipsoïde et de l'hy



boloïde, car, si l'on retranche de son équation celle de l'ellipsoïde, on trouve, en divisant par 2,

$$\frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + 1 = 0.$$

C'est l'équation de l'hyperboloïde.

*Note.* — MM. F. Lebreton et L. Mandrillon, élèves du lycée de Besançon (classe de M. Crépin), ont envoyé deux excellentes solutions, l'une analytique et l'autre géométrique. M. E. Estienne, élève du lycée de Bar-le-Duc, envoie aussi une très bonne solution géométrique, et M. A. Leinekugel une solution analytique.

## SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(FACULTÉ DE PARIS, 1875);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,  
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

*Déterminer une courbe (c) telle que si l'on forme une de ses transformées (C) par rayons vecteurs réciproques relativement à un pôle donné O, les rayons de courbure en deux points correspondants m et M des deux courbes (c) et (C) soient dans un rapport donné.*

Donnons d'abord une expression simple du rayon de courbure. On a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta + dV},$$

$\alpha$  étant l'angle de la tangente avec l'axe polaire et V l'angle formé par la tangente avec le rayon vecteur; mais

$$\cos V = \frac{dr}{ds}, \quad \sin V = \frac{r d\theta}{ds},$$

d'où, en éliminant  $ds$  et  $d\theta$ ,

$$\rho = \frac{dr}{\cos V d\theta + \cos V dV} = \frac{r dr}{\sin V dr + r \cos V dV} = \frac{r dr}{d.r \sin V}.$$

Cette expression, ou encore, en appelant  $p$  la distance de la tangente à l'origine,  $\rho = \frac{r dr}{dp}$ , est celle que nous voulions obtenir.

Si l'on désigne par  $K$  le rapport des rayons de courbure aux points  $m(r, \theta)$ ,  $M(R, \theta)$ , l'équation de condition sera

$$(1) \quad \frac{r dr}{d.r \sin V} = \frac{KR dR}{d.R \sin V},$$

en remarquant que les angles  $V$  en ces deux points sont supplémentaires.

On a d'ailleurs, par définition,

$$Rr = a^2,$$

d'où

$$R = \frac{a^2}{r}, \quad dR = -\frac{a^2}{r^2} dr.$$

Substituant dans l'équation (1), elle devient

$$\frac{r dr}{d.r \sin V} = -\frac{K a^4 dr}{r^3 d. \frac{a^2}{r} \sin V}.$$

On tire de là

$$\frac{d. \sin V}{\sin V} = \frac{r^2 - K a^2}{r(r^2 + K a^2)} dr = -\frac{dr}{r} + \frac{2r dr}{r^2 + K a^2},$$

et, en intégrant,

$$\log \sin V = -\log r + \log C(r^2 + K a^2)$$

ou

$$\sin V = \frac{C(r^2 + K a^2)}{r}.$$

Égalant cette valeur de  $\sin V$  à celle  $\frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}}$  don-

née plus haut, on aura l'équation différentielle de la courbe,

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}} = \frac{C(r^2 + Ka^2)}{r};$$

d'où

$$(2) \quad \frac{1}{C} d\theta = \frac{(r^2 + Ka^2) dr}{r \sqrt{r^2 - C^2(r^2 + Ka^2)^2}},$$

$$\frac{1}{C} d\theta = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - C^2(r^2 + Ka^2)^2}} + Ka^2 \frac{dr}{r \sqrt{r^2 - C^2(r^2 + Ka^2)^2}}.$$

Le premier terme du second membre peut s'écrire

$$\frac{d.(r^2)}{2C \sqrt{-K^2 a^4 + \left(\frac{1}{C^2} - 2Ka^2\right)(r^2) - (r^2)^2}};$$

L'intégrale est

$$\frac{1}{2C} \arccos \frac{1 - 2KC^2 a^2 - 2C^2 r^2}{\sqrt{1 - 4KC^2 a^2}}.$$

Le second terme peut se mettre sous une forme analogue, après avoir divisé haut et bas par  $r^3$  :

$$-\frac{1}{2C} \frac{d(r^{-2})}{\sqrt{-\frac{1}{K^2 a^4} + \frac{1}{K^2 a^4} \left(\frac{1}{C^2} - 2Ka^2\right)(r^{-2}) - (r^{-2})^2}}.$$

On trouve, pour l'intégrale,

$$-\frac{1}{2C} \arccos \frac{1 - 2KC^2 a^2 - 2K^2 a^4 C^2 r^{-2}}{\sqrt{1 - 4Ka^2 C^2}}.$$

**On aura donc, pour l'intégrale de l'équation (2),**

$$2(\theta - \theta_0) = \arccos \frac{1 - 2KC^2a^2 - 2C^2r^2}{\sqrt{1 - 4Ka^2C^2}} - \arccos \frac{1 - 2KC^2a^2 - 2K^2a^4C^2r^{-2}}{\sqrt{1 - 4Ka^2C^2}},$$

$\theta_0$  étant la constante d'intégration.

**En prenant les cosinus des deux membres, on trouve, après des transformations connues,**

$$\cos 2(\theta - \theta_0) = \frac{-2K^2 a^4 C^2 + r^2 - 2C^2 r^4}{(1 - 4K a^2 C^2) r^2}$$

ou

$$C^2 r^4 - [\sin^2(\theta - \theta_0) + 2K a^2 C^2 \cos 2(\theta - \theta_0)] r^2 + K^2 a^4 C^2 = 0.$$

**Telle est l'équation de la courbe demandée.**

## RÉDUCTION DE DEUX POLYNOMES HOMOGÈNES DU SECOND DEGRÉ A DES SOMMES DE CARRÉS;

PAR M. H. LAURENT.

## CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Soient  $f = \sum a_{ij} x_i x_j$  et  $g = \sum b_{ij} x_i x_j$  deux polynômes homogènes du second degré à  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; nous supposons, comme on a l'habitude de le faire, que l'on a entre les constantes  $a, b$  les relations  $a_{ij} = a_{ji}$  et  $b_{ij} = b_{ji}$  pour toutes les valeurs 1, 2, 3, ...,  $n$  de  $i$  et  $j$ . Posons

[illegible]

les  $\gamma$  désignant dans ces formules des coefficients indéterminés et  $y_1, y_2, \dots, y_n$  de nouvelles variables. Les fonctions  $f, g$  se transformeront en des fonctions de  $y_1, y_2, \dots, y_n$  données par les formules

$$f = \Sigma a_{ij} (\gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \dots + \gamma_{in} y_n) (\gamma_{j1} y_1 + \dots + \gamma_{jn} y_n),$$

$$g = \Sigma b_{ij} (\gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \dots + \gamma_{in} y_n) (\gamma_{j1} y_1 + \gamma_{j2} y_2 + \dots + \gamma_{jn} y_n),$$

que l'on peut aussi écrire

$$f = \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} y_\mu y_\nu, \quad g = \Sigma b_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} y_\mu y_\nu,$$

de sorte que, si l'on pose

$$(2) \quad \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = 0,$$

$$(3) \quad \Sigma b_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = 0,$$

$$(4) \quad \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\mu} = A_\mu,$$

$$(5) \quad \Sigma b_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\mu} = B_\mu,$$

$\mu$  et  $\nu$  étant supposés fixes sous le signe  $\Sigma$ , on aura simplement

$$f = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \dots + A_n y_n^2,$$

$$g = B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2 + \dots + B_n y_n^2.$$

Si l'on parvient à résoudre les équations (2) et (3) par rapport aux  $\gamma_{ij}$ , les fonctions  $f$  et  $g$  pourront être ramenées à des sommes de carrés au moyen du changement de variables représenté par les équations (1). Pour résoudre ces équations, nous procéderons comme il suit : soient  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la demi-dérivée de  $f$  relative à  $x_i$ , et  $g_i$  la demi-dérivée de  $g$  relative à la même variable; les équations (2) et (3) peuvent s'écrire respectivement:

$$(2 \text{ bis}) \quad \gamma_{1\mu} f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots, \gamma_{n\nu}) + \gamma_{2\mu} f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots, \gamma_{n\nu}) + \dots = 0,$$

$$(3 \text{ bis}) \quad \gamma_{1\mu} g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots, \gamma_{n\nu}) + \gamma_{2\mu} g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots, \gamma_{n\nu}) + \dots = 0;$$

et, comme elles ont lieu pour  $\mu = 1, 2, 3, \dots, n$ , il faut en

conclure

$$\frac{f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)}{g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)} = \frac{f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)}{g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots)} = \dots,$$

pour toutes les valeurs 1, 2, 3, ...,  $n$  de  $\nu$ . Égalons ces rapports à une nouvelle indéterminée  $\lambda_\nu$ , nous aurons

$$(6) \quad \begin{cases} f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) - \lambda_\nu g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) = 0, \\ f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) - \lambda_\nu g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \dots) = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Ces équations détermineront les quantités  $\gamma$  qui portent le second indice  $\nu$ . Effaçons, pour simplifier, cet indice; on pourra les écrire comme il suit, en remplaçant  $f_1, f_2, \dots, g_1, g_2, \dots$  par leurs développements :

$$(7) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda b_{11})\gamma_1 \\ \quad + (a_{12} - \lambda b_{12})\gamma_2 + \dots + (a_{1n} - \lambda b_{1n})\gamma_n = 0, \\ \dots \dots \dots \\ (a_{n1} - \lambda b_{n1})\gamma_1 \\ \quad + (a_{n2} - \lambda b_{n2})\gamma_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda b_{nn})\gamma_n = 0. \end{cases}$$

Commençons par éliminer  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ; nous aurons l'équation du  $n^{\text{ième}}$  degré en  $\lambda$

$$(8) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Sil'on appelle  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les racines de cette équation et si, dans les formules (7), on remplace successivement  $\lambda$  par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , elles feront connaître les valeurs des rapports  $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \dots$ ; si l'on se donne  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , les formules (4) achèveront de déterminer les  $\gamma_{ij}$ .

Multiplions alors la première formule (7) par  $\gamma_1$ , la seconde par  $\gamma_2$ , etc., et ajoutons, nous aurons

$$\Sigma a_{ij} \gamma_i \gamma_j = \lambda \Sigma b_{ij} \gamma_i \gamma_j;$$

donc

$$A_\mu = \lambda_\mu B_\mu,$$

de sorte que

$$(9) \quad g = B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2 + \dots + B_n y_n^2,$$

$$(10) \quad f = B_1 \lambda_1 y_1^2 + B_2 \lambda_2 y_2^2 + \dots + B_n \lambda_n y_n^2;$$

$f$  et  $g$  sont ainsi ramenés à des sommes de carrés par une même substitution linéaire.

Mais, pour que les calculs que nous venons d'esquisser conduisent à un résultat admissible, il faut : 1° que l'équation en  $\lambda$  ait effectivement  $n$  racines; 2° que les équations (7) soient compatibles; 3° que l'on puisse effectivement choisir arbitrairement  $B_1, B_2, \dots$ , c'est-à-dire que les  $g(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$  ne soient pas identiquement nuls; 4° que la substitution (1) soit réversible, c'est-à-dire que les  $\gamma$  puissent se calculer en fonction des  $x$ , c'est-à-dire que les fonctions transformées (9) et (10) soient comme les proposées des fonctions de  $n$  variables, ce que nous supposerons; cela revient à admettre que les fonctions  $f$  et  $g$  ont des discriminants différents de zéro, et nous l'admettrons effectivement jusqu'à nouvel ordre.

#### DÉMONSTRATION D'UN LEMME.

*Si l'équation  $\Lambda = 0$  admet pour racine simple la quantité  $\lambda$ , les mineurs de  $\Lambda$  ne seront pas tous nuls et la quantité  $g(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$  sera différente de zéro; si, au contraire, les mineurs de  $\Lambda$  n'étant pas tous nuls,  $\Lambda = 0$  admet  $\lambda$  pour racine double, on aura nécessairement  $g(\gamma_1, \gamma_2, \dots) = 0$ .*

D'abord, si les mineurs de  $\Lambda$  sont tous nuls, comme

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} = - \sum \frac{d\Lambda}{da_{ij}} b_{ij},$$

$\frac{d\Lambda}{d\lambda}$  sera nul et  $\Lambda = 0$  aura  $\lambda$  pour racine double au moins.

Si tous les mineurs de  $\Lambda$  ne sont pas nuls, on a, en

vertu des équations (7),

$$\gamma_p \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_i \frac{d\Lambda}{da_{pj}},$$

$$\gamma_q \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{qi}},$$

et par suite

$$(12) \quad \gamma_p \gamma_q \left( \frac{d\Lambda}{da_{ij}} \right)^2 = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{qi}} = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{iq}}.$$

Or on a, en vertu d'un théorème connu,

$$\Lambda \frac{d^2 \Lambda}{da_{pj} da_{iq}} = \frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{iq}} - \frac{d\Lambda}{da_{pq}} \frac{d\Lambda}{da_{ij}},$$

et, comme  $\Lambda = 0$ ,

$$\frac{d\Lambda}{da_{pj}} \frac{d\Lambda}{da_{iq}} = \frac{d\Lambda}{da_{pq}} \frac{d\Lambda}{da_{ij}}.$$

L'équation (12) devient alors

$$\gamma_p \gamma_q \left( \frac{d\Lambda}{da_{ij}} \right)^2 = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{ij}} \frac{d\Lambda}{da_{pq}};$$

or, puisque tous les mineurs de  $\Lambda$  ne sont pas nuls, on peut supposer  $\frac{d\Lambda}{da_{ij}} \geq 0$ , et alors on a

$$\gamma_p \gamma_q \frac{d\Lambda}{da_{ij}} = \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{da_{pq}};$$

on en conclut

$$\frac{d\Lambda}{da_{ij}} \sum b_{pq} \gamma_p \gamma_q = \gamma_i \gamma_j \sum \frac{d\Lambda}{da_{pq}} b_{pq}$$

ou bien

$$(13) \quad \frac{d\Lambda}{da_{ij}} g = - \gamma_i \gamma_j \frac{d\Lambda}{d\lambda}.$$

Donc  $g$  ne s'annule que si  $\frac{d\Lambda}{d\lambda}$ ,  $\gamma_i$  ou  $\gamma_j$  sont nuls. Donc enfin, si la racine  $\lambda$  n'est pas racine double de  $\Lambda = 0$ ,  $g$  ne s'annulera que si  $\gamma_i$  ou  $\gamma_j$  sont nuls. Supposons  $\gamma_i = 0$ ; le système (7) se réduit en supprimant la  $j^{\text{ième}}$



ne à un système de  $n - 1$  équations homogènes à  $n - 1$  connues dont le déterminant n'est pas nul, car il est égal à  $\frac{d\Lambda}{da_{ij}}$ . Donc il faut que  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  soient tous nuls, ce qui est absurde, puisque  $\Lambda = 0$ ; donc  $\gamma_i$  ne saurait être nul, donc  $\gamma_j$  pour la même raison ne l'est pas non plus; donc enfin, si  $\lambda$  n'est pas racine multiple de  $\Lambda = 0$ ,  $g$  ne saurait être nul.

Ces conclusions tombent en défaut quand tous les mineurs de  $\Lambda$  s'annulent. Pour discuter ce cas spécial, imaginons que les coefficients  $a_{kl}$  de la fonction  $f$  deviennent variables et que, pour des valeurs particulières de ces coefficients, les mineurs de  $\Lambda$  s'annulent sans que ses mineurs du second ordre passent tous par zéro. Différentions l'équation (13); on aura, en observant que  $g$  ne contient pas les  $a_{kl}$ ,

$$g \sum \frac{d^2 \Lambda}{da_{ij} da_{kl}} \delta a_{kl} = - \gamma_i \gamma_j \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \delta \lambda - \frac{d\Lambda}{d\lambda} \delta(\gamma_i \gamma_j).$$

Si  $\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2}$  n'est pas nul, cette formule devient, en supposant  $\frac{d\Lambda}{d\lambda} = 0$ ,

$$14) \quad g \sum \frac{d^2 \Lambda}{da_{ij} da_{kl}} \delta a_{kl} = - \gamma_i \gamma_j \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \delta \lambda.$$

Il est facile de prouver que  $\delta \lambda$  n'est pas nul, il en résultera que  $g$  ne peut s'annuler que si  $\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0$ , c'est-à-dire que si  $\lambda$  est racine triple de  $\Lambda = 0$ . En effet, en différentiant  $\Lambda = 0$ , on a

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} \delta \lambda + \sum \frac{d\Lambda}{da_{kl}} \delta a_{kl} = 0.$$

Comme  $\frac{d\Lambda}{d\lambda} = 0$ ,  $\frac{d\Lambda}{da_{kl}} = 0$ . Différentions encore; nous

aurons

$$\frac{d\Lambda}{d\lambda} \delta^2 \lambda + \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \delta \lambda^2 + 2 \sum \frac{d}{d\lambda} \frac{d\Lambda}{da_{kl}} \delta \lambda \delta a_{kl} + \sum \frac{d^2 \Lambda}{da_{kl} da_{ij}} \delta a_{kl} \delta a_{ij} = 0,$$

formule qui se réduit, dans nos hypothèses, à

$$\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} \delta \lambda^2 + 2 \delta \lambda \sum \frac{d}{d\lambda} \frac{d\Lambda}{da_{kl}} \delta a_{kl} + \sum \frac{d^2 \Lambda}{da_{kl} da_{ij}} \delta a_{kl} \delta a_{ij} = 0.$$

On voit que  $\delta \lambda$  non seulement n'est pas nul, mais en général a deux valeurs si  $\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2}$  n'est pas nul; quant à  $\sum \frac{d^2 \Lambda}{da_{ij} da_{kl}} \delta a_{kl}$ , il est différent de zéro pour des valeurs convenables des  $\delta a_{kl}$ , si tous les mineurs du second ordre de  $\Lambda$  ne sont pas nuls, comme on l'a supposé.

La formule (14) montre que, si  $\Lambda = 0$  a une racine triple sans que tous les mineurs du second ordre de  $\Lambda = 0$  soient nuls,  $g$  sera nul. Le cas où tous ces mineurs seraient nuls se traitera en différentiant (14) avec la caractéristique  $\delta$ , et ainsi de suite.

#### DISCUSSION DES RÉSULTATS.

Supposons que l'équation  $\Lambda$  n'ait que des racines simples finies et différentes de zéro. Les équations (7) donneront pour chaque valeur de  $\lambda$  des valeurs bien déterminées de  $\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 : \dots$ . Les mineurs de  $\Lambda$  n'étant pas tous nuls et  $\frac{d\Lambda}{d\lambda}$  étant finis,  $B_1, B_2, \dots$  pourront être choisis différents de zéro, et la substitution (1) aura tous ses coefficients bien déterminés; j'ajoute qu'elle sera réversible, c'est-à-dire que son déterminant  $\Gamma$  sera dif-

différent de zéro, c'est-à-dire que les  $\gamma$  seront des fonctions des  $x$ . En effet, en vertu de (3 bis) et de (4), on a

$$\begin{vmatrix} g_1(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1n}) & g_2(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1n}) \dots \\ g_1(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{2n}) & g_2(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{2n}) \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix} = B_1 B_2 \dots B_n;$$

mais,  $B_1, B_2, \dots$  étant différents de zéro, il faut que  $\Gamma$  lui-même soit différent de zéro. C. Q. F. D.

Je suppose que  $\lambda$  soit racine double de  $\Lambda = 0$ . En général, la réduction de  $f$  et  $g$  à des sommes de carrés ne pourra plus se faire parce que,  $g = B$  étant nul,  $\Gamma$  l'est aussi; pour parler plus exactement, la réduction à une somme de carrés est encore possible, mais la transformation (1) n'est pas réversible et elle altère la nature des fonctions  $f$  et  $g$ .

Cependant, si tous les mineurs de  $\Lambda = 0$  étaient nuls,  $g = B$  ne serait plus forcément nul et la transformation, bien que ne plus être possible, pourrait s'effectuer d'une infinité de manières, puisque les équations (7), se réduisant à  $n - 2$  distinctes, fourniraient une infinité de systèmes admissibles pour les quantités  $\gamma_1 : \gamma_2 : \dots$ . La valeur double étant connue, on pourra disposer de ces systèmes de manière à satisfaire à (2) et (3).

Si l'équation  $\Lambda = 0$  avait une racine triple, la réduction à des sommes de carrés redeviendrait impossible, à moins que tous les mineurs du troisième ordre de  $\Lambda$  ne fussent nuls, et ainsi de suite.

Maintenant supposons que l'équation  $\Lambda = 0$  ait une racine nulle;  $f$  aura son discriminant nul et sera une fonction de  $n - 1$  variables seulement, de sorte qu'un carré devra disparaître de l'expression de  $f$ . C'est ce qui aura lieu par l'application de la méthode expliquée plus haut. Le cas où  $\Lambda = 0$  aurait une racine infinie sans avoir de racine nulle pourra être évité en considérant la fonc-

tion  $g - \lambda f$  à la place de  $f - \lambda g$ . Enfin le cas où  $\Lambda = 0$  aurait à la fois une racine nulle et une racine infinie sera le seul qui échappera à notre méthode; mais, dans ce cas,  $f$  et  $g$  sont tous deux des fonctions de  $n$  variables au plus et c'est alors sur ces variables réduit à leur minimum qu'il conviendra d'appliquer la méthode exposée.

En résumé :

*Étant donnés deux polynômes homogènes du second degré  $f$  et  $g$  à  $n$  variables, on pourra toujours les transformer en des sommes de carrés au moyen d'une substitution linéaire réversible, à la condition que le discriminant de  $f - \lambda g$ , égalé à zéro, n'ait que des racines simples, ou que, s'il a des racines multiples, chaque racine d'ordre  $m$  correspondent des mineurs d'ordre  $m - 1$ , du discriminant de  $f - \lambda g$ , tous nuls.*

Maintenant considérons les formes réduites de  $f$  et  $g$  et supposons les coefficients de ces deux fonctions réels. L'équation  $\Lambda = 0$  n'aura pas en général toutes ses racines réelles, de sorte que, l'une des formes réduites étant à coefficients réels, l'autre ne sera pas nécessairement à coefficients réels; la substitution (1) elle-même pourra fort bien n'être pas réelle. Il importe cependant de discerner les cas dans lesquels on aura affaire à des substitutions réelles; or la forme particulière de la fonction  $\Lambda$  permet de compter *a priori* et assez facilement le nombre des racines réelles de  $\Lambda = 0$ . On a, en effet,

$$\Lambda \frac{d^2 \Lambda}{da_{nn} da_{n-1,n-1}} = \frac{d\Lambda}{da_{nn}} \frac{d\Lambda}{da_{n-1,n-1}} - \left( \frac{d\Lambda}{da_{n-1,n}} \right)^2,$$

ou, en appelant  $\Lambda_1$  ce que devient  $\Lambda$  quand on supprime la dernière ligne et la dernière colonne,  $\Lambda_2$  ce qu'

vient quand on supprime les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes, etc.,

$$\Lambda \Lambda_2 = \Lambda_1 \frac{d\Lambda}{da_{n-1,n-1}} - \left( \frac{d\Lambda}{da_{n-1,n}} \right)^2.$$

On aurait des relations analogues entre  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ , entre  $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ , etc., et l'on voit que, si  $\Lambda_1$  s'annule,  $\Lambda$  et  $\Lambda_2$  seront de signes contraires. En général, si  $\Lambda_i$  s'annule,  $\Lambda_{i+1}$  et  $\Lambda_{i-1}$  seront de signes contraires. Cette règle n'est malheureusement pas sans exception, et,  $\Lambda_1$  s'annulant si  $\frac{d\Lambda}{da_{n,n-1}}$  est nul, on voit que  $\Lambda$  ou  $\Lambda_2$  s'annulera aussi.

Quoi qu'il en soit, les cas où la remarque faite tomberait en défaut seront exceptionnels, et quand  $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots$  seront tels que pour  $\lambda = +\infty$  et  $-\infty$  ils ne présentent que des variations dans un cas, et que des permanences dans l'autre,  $\Lambda = 0$  aura toutes ses racines réelles.

L'équation  $\Lambda = 0$  aura toutes ses racines réelles lorsque l'une des fonctions  $f, g$  sera une somme de carrés tous positifs ou tous négatifs. En effet, les racines de  $\Lambda = 0$  ne changent pas par une substitution orthogonale ramenant  $f$  seul à une somme de carrés

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \dots + A_n x_n^2.$$

Tous ces carrés étant censés positifs, on peut faire la substitution  $x_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{A_1}}, x_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{A_2}}, \dots$ ; alors la substitution qui ramènera à la fois  $f$  et  $g$  à des sommes de carrés aura pour équation  $\Lambda = 0$  une équation de la forme

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle a, comme l'on sait, toutes ses racines réelles.

## INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

Pour faire une application géométrique des principes précédents, supposons que  $f = 0$  et  $g = 0$  représentent deux surfaces du second ordre ; les coefficients de  $f$  et  $g$  seront supposés réels. Dire que l'on peut ramener  $f$  et  $g$  à des sommes de carrés par une même substitution linéaire, c'est dire que deux surfaces du second ordre ont un tétraèdre autopolaire commun. Les théorèmes établis plus haut s'interprètent donc ainsi :

*Deux surfaces du second ordre qui ne se touchent pas, car alors on n'a pas à la fois*

$$f = 0, \quad g = 0, \quad \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \dots = \lambda,$$

*ont toujours un tétraèdre autopolaire commun.*

*Deux surfaces du second ordre qui se touchent en un seul point n'ont pas de tétraèdre autopolaire commun.*

*Deux surfaces du second ordre qui ont un double contact ont une infinité de tétraèdres autopolaires communs.*

*Deux surfaces circonscrites n'ont pas de tétraèdres autopolaires communs.*

## QUESTION. .

1356. Il y a deux cubiques passant par huit points donnés et tangentes à une droite menée par l'un de ces points. (E. G., ancien élève du lycée de Reims.)

1357. ABC étant un triangle donné, on joint ses sommets à un point O de son plan par des lignes droites qui déterminent sur les côtés du triangle six segments = trouver le lieu du point O pour lequel le produit de trois segments non consécutifs est constant. (BARBARIN.)



proposé

$$(2) \quad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m$$

le sera certainement. Or 2 est une limite supérieure pour le polynôme (1) : donc 2 est aussi une limite supérieure pour le polynôme (2).

Remarquons d'ailleurs qu'on peut obtenir une limite plus petite que 2 en appliquant, par exemple, la méthode de Maclaurin, ou telle autre que l'on voudra.

Cela posé, considérons une équation entière quelconque; formons l'équation qui admet pour racines les racines de la première, divisées par  $p$ . Si l'équation proposée est

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

la transformée sera

$$p^m A_0 x^m + p^{m-1} A_1 x^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

et l'on peut toujours choisir  $p$  de telle sorte que le coefficient  $A_0 p^m$  soit le plus grand en valeur absolue. Pour cela, on comparera tous les termes au premier, et l'on verra quelles sont les valeurs à donner à  $p$  pour que  $A_0 p^m$  soit plus grand que chacun d'eux : la plus grande valeur de  $p$  sera une valeur cherchée.

Si nous formons les coefficients successifs, nous pourrions appliquer une des règles connues; mais, si nous voulons opérer plus rapidement, nous pourrions prendre 2 comme limite supérieure : alors une limite pour l'équation proposée sera certainement  $2p$ , ou plus généralement, si nous avons trouvé  $l$  comme limite de la transformée, une limite supérieure de la proposée sera certainement  $lp$ .

Cette limite est, en général, beaucoup plus avantageuse que la limite de Maclaurin ou de Lagrange, à moins que le plus grand coefficient négatif ne soit le premier des coef-







—  $A_q x^{m-q}$ ;  $\sqrt[q]{\frac{A_q}{A_0}}$  sera la racine d'une des équations binômes dont nous venons de parler; la plus grande valeur que prendra cette quantité, lorsque l'on considérera successivement tous les termes négatifs, sera une limite pour le polynôme.

---

## SUR LA DÉTERMINATION DU CERCLE OSCULATEUR D'UNE COURBE A DOUBLE COURBURE;

PAR M. E. HUNYADY,

Professeur à l'École polytechnique de Budapest.

---

En désignant par  $x, y, z$  les coordonnées orthogonales d'un point d'une courbe à double courbure, par  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $r$  les coordonnées du centre et le rayon du cercle osculateur; en outre, considérant  $x, y, z$  comme les fonctions d'un paramètre variable  $t$ , il est bien connu que le cercle osculateur de la courbe au point  $x, y, z$  est déterminé par les équations suivantes :

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2,$$

$$(2) \quad \begin{cases} a(x - \alpha) + q(y - \beta) + c(z - \gamma) = 0, \\ a'(x - \alpha) + b'(y - \beta) + c'(z - \gamma) = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \\ (bc' - b'c)(x - \alpha) + (ca' - c'a)(y - \beta) \\ \quad + (ab' - a'b)(z - \gamma) = 0, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a, & \frac{dy}{dt} = b, & \frac{dz}{dt} = c, \\ \frac{d^2x}{dt^2} = a', & \frac{d^2y}{dt^2} = b', & \frac{d^2z}{dt^2} = c'. \end{cases}$$

On sait que la résolution du problème en question dépend essentiellement de la résolution des équations (2), linéaires en  $x - \alpha$ ,  $y - \beta$ ,  $z - \gamma$ . C'est la résolution du système mentionné à laquelle je prends la liberté de vouer ces lignes.

En tirant la valeur de  $x - \alpha$  des équations (2), on trouve, par la voie du calcul des déterminants, que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ bc' - b'c & ca' - c'a & ab' - a'b \end{vmatrix} (x - \alpha) \\ = - \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \begin{vmatrix} ca' - c'a & ab' - a'b \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Pour transformer la valeur de  $x - \alpha$  exprimée par cette équation, multiplions cette équation par la suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

Le résultat de la multiplication sera

$$\begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & aa' + bb' + cc' & a \\ aa' + bb' + cc' & a'^2 + b'^2 + c'^2 & a' \\ 0 & 0 & bc' - b'c \end{vmatrix} (x - \alpha) \\ = - \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \begin{vmatrix} -a(bc' - b'c) & -a'(bc' - b'c) \\ \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 - a^2 & \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} - aa' \end{vmatrix}.$$

En chassant le facteur commun  $(bc' - b'c)$  dans cette équation et en remarquant que, d'après les notations (3), on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2, \\ aa' + bb' + cc' = \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2},$$

en outre que le déterminant à droite, abstraction faite du facteur  $bc' - b'c$ , se laisse transformer dans le suivant

$$\begin{vmatrix} -a & -a' \\ \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 & \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \end{vmatrix},$$

on aura, pour la détermination de la valeur de  $x - \alpha$ ,

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 & \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \\ \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} & a'^2 + b'^2 + c'^2 \end{vmatrix} (x - \alpha) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \begin{vmatrix} a & a' \\ \frac{ds}{dt} & \frac{d^2s}{dt^2} \end{vmatrix},$$

d'où l'on tire facilement la valeur de  $x - \alpha$ . On obtient les valeurs de  $y - \beta$ ,  $z - \gamma$  par une voie analogue, et enfin la valeur de  $r$  par l'équation (1).

## SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(FACULTÉ DE LILLE. — NOVEMBRE 1878);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,

Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

*Une surface de révolution autour de l'axe des  $z$ , en coordonnées rectangulaires, est définie par l'équation  $z = f(r)$ ,  $r$  étant la distance d'un point de la surface à l'axe de rotation : trouver l'équation différentielle en coordonnées polaires des projections sur le plan  $xy$  des courbes tracées sur cette surface, et qui jouissent de la propriété que le plan osculateur en chacun des points de l'une d'elles comprenne la normale à la surface au même point; prendre  $r$  pour variable indépendante.*

Le plan osculateur en un point  $(x, y, z)$  d'une courbe a pour équation

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

en posant

$$A = dy \, d^2 z - dz \, d^2 y,$$

$$B = dz \, d^2 x - dx \, d^2 z,$$

$$C = dx \, d^2 y - dy \, d^2 x.$$

Les équations de la normale à la surface au même point sont

$$X - x + \frac{dz}{dx} (Z - z) = 0,$$

$$Y - y + \frac{dz}{dy} (Z - z) = 0.$$

La normale sera dans le plan osculateur si l'on a

$$A \frac{dz}{dx} + B \frac{dz}{dy} - C = 0.$$

Or,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$\frac{dx}{dr} = \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dr}, \quad \frac{d^2 x}{dr^2} = -2 \sin \theta \frac{d\theta}{dr} - r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} - r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2}$$

$$\frac{dy}{dr} = \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dr}, \quad \frac{d^2 y}{dr^2} = 2 \cos \theta \frac{d\theta}{dr} - r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2}$$

$$A = \frac{d^2 z}{dr^2} \left( \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dr} \right) - \frac{dz}{dr} \left( 2 \cos \theta \frac{d\theta}{dr} - r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} \right),$$

$$B = -\frac{d^2 z}{dr^2} \left( \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dr} \right) - \frac{dz}{dr} \left( 2 \sin \theta \frac{d\theta}{dr} + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} + r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} \right),$$

$$C = \left( \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dr} \right) \left( 2 \cos \theta \frac{d\theta}{dr} - r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} \right) + \left( \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dr} \right) \left( 2 \sin \theta \frac{d\theta}{dr} + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} + r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dr^2} \right).$$

D'ailleurs,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{dz}{dr} \cos \theta,$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dr} \frac{dr}{dy} = \frac{dz}{dr} \sin \theta.$$

Donc

$$A \frac{dz}{dx} + B \frac{dz}{dy} - C = \frac{dz}{dr} (A \cos \theta + B \sin \theta) - C.$$

Mais

$$A \cos \theta + B \sin \theta = f''(r) r \frac{d\theta}{dr} + f'(r) \left( 2 \frac{d\theta}{dr} + r \frac{d^2 \theta}{dr^2} \right),$$

$$C = 2 \frac{d\theta}{dr} + r^2 \frac{d^3 \theta}{dr^3} + r \frac{d^2 \theta}{dr^2}.$$

L'équation différentielle des courbes est donc

$$f'(r) f''(r) r \frac{d\theta}{dr} - f'^2(r) \left( 2 \frac{d\theta}{dr} + r \frac{d^2 \theta}{dr^2} \right) - 2 \frac{d\theta}{dr} - r^2 \frac{d^3 \theta}{dr^3} - r \frac{d^2 \theta}{dr^2} = 0$$

ou

$$r[1 + f'^2(r)] \frac{d^2 \theta}{dr^2} + \left\{ 2[1 + f'^2(r)] - r f'(r) f''(r) \right\} \frac{d\theta}{dr} + r^2 \frac{d^3 \theta}{dr^3} = 0.$$

## SOLUTION D'UNE QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1879;

PAR M. P. BARBARIN,  
Professeur au lycée de Nice.

*On donne un ellipsoïde et, sur cette surface, deux points diamétralement opposés A et B; on joint les*

points A et B à un point variable  $m$  de l'ellipsoïde :  
 1° trouver une surface  $S$  telle que le plan tangent au point  $M$ , où elle est rencontrée par la droite  $Am$ , soit parallèle à la droite  $Bm$ ; 2° trouver sur cette surface une courbe telle que la tangente en chaque point  $M$  de cette courbe et l'intersection du plan tangent à la surface en  $M$  avec le plan qui passe par ce point  $M$  et par le diamètre  $AB$  soient deux tangentes conjuguées par rapport à la surface.

1° L'ellipsoïde, rapporté à la droite  $AB$  comme axe des  $x$  et à deux diamètres conjugués  $Oy$ ,  $Oz$  du plan conjugué à  $Ox$ , a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  sont les coordonnées du point variable  $m$ , on a donc la relation

$$(1) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1.$$

Soient  $x$ ,  $y$ ,  $z$  les coordonnées du point  $M$  de la surface  $S$ . Puisqu'il se trouve sur  $Am$ , on a les égalités

$$(2) \quad \frac{x - a}{x_1 - a} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

Enfin le plan tangent au point  $M$  à la surface  $S$  a pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

en désignant par  $p$ ,  $q$  les dérivées partielles  $\frac{dz}{dx}$ ,  $\frac{dz}{dy}$ . Or il doit être parallèle à la droite  $Bm$ ; par conséquent

$$(3) \quad p(x_1 + a) + qy_1 - z_1 = 0.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  entre les équations (1), (2), (3).



Les équations (2) donnent facilement

$$\frac{x-a}{x_1-a} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{p(x-a) + qy - z}{-2ap},$$

d'où

$$x_1 = a \frac{qy - z - p(x-a)}{p(x-a) + qy - z},$$

$$y_1 = a \frac{-2py}{p(x-a) + qy - z},$$

$$z_1 = a \frac{-2pz}{p(x-a) + qy - z}.$$

Je substitue ces valeurs de  $x_1, y_1, z_1$  dans l'équation (1) et j'ai, en réduisant,

$$p \left[ p \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - \frac{(x-a)(qy - z)}{a^2} \right] = 0.$$

Or, sur la surface cherchée,  $p$  n'est pas nul, car, s'il l'était, cette surface serait un cylindre ayant ses génératrices parallèles à AB. Son plan tangent au point M ne serait donc autre que le plan AmB, et la surface serait ce plan lui-même; or ce plan est quelconque: donc tous les points de l'espace jouiraient de la propriété des points M. Nous excluons cette hypothèse en supposant  $p \geq 0$ ; il reste donc l'équation

$$p \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - \frac{(x-a)(qy - z)}{a^2} = 0,$$

ou

$$(4) \quad p \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) q - \frac{(x-a)y}{a^2} + \frac{(x-a)z}{a^2} = 0,$$

qui est l'équation aux dérivées partielles de la surface S.

Pour l'intégrer, je résoudrai le système

$$\frac{dx}{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} = - \frac{dy}{\frac{(x-a)y}{a^2}} = - \frac{dz}{\frac{(x-a)z}{a^2}},$$

qui donne successivement

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \text{ou} \quad y = Cz,$$

et

$$\frac{(x-a)}{a^2} z dx + \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dz = 0,$$

ou

$$\frac{x-a}{a^2} dx + \left( \frac{C^2}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) z dz = 0,$$

ou enfin

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = C_1.$$

L'équation générale de la surface  $S$  est donc

$$(5) \quad F \left[ \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \frac{y}{z} \right] = 0.$$

La génération de cette surface est fort simple; elle est produite, en effet, par des ellipses qui sont les intersections de plans conduits suivant  $AB$  avec des ellipsoïdes homothétiques au proposé et ayant le point  $A$  pour centre.

*Solution géométrique.* — Des considérations géométriques extrêmement simples permettent de conclure immédiatement ce résultat. En effet, dans l'ellipse suivant laquelle le plan  $AmB$  coupe l'ellipsoïde proposé, les cordes  $Am$ ,  $Bm$  sont conjuguées. La tangente à la section de la surface  $S$  par ce même plan est  $MT$ , parallèle à  $Bm$ , et par conséquent aussi conjuguée de la direction  $AM$ ; cette tangente est la même que celle de l'ellipse qui a  $A$  pour centre et est homothétique de l'ellipse  $AmB$ ; donc cette ellipse est la section de la surface par le plan  $AmB$ .

En particulier, tous les ellipsoïdes homothétiques au proposé et ayant  $A$  pour centre rentrent dans la catégorie des surfaces  $S$  ainsi engendrées.

2° L'intersection du plan tangent à la surface en M avec le plan AMB n'est autre chose que la tangente au point M à l'ellipse génératrice du plan AMB. Ses équations sont

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \quad \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$$

ou

$$\frac{X - x}{z - qy} = \frac{Y - y}{py} = \frac{Z - z}{pz}.$$

Celles de la tangente à la courbe cherchée au point M sont

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Ces deux droites doivent être des tangentes conjuguées, c'est-à-dire être parallèles à deux diamètres conjugués de l'indicatrice au point M.

Au voisinage du point M, le Z de la surface S peut se développer, d'après le théorème de Taylor étendu aux fonctions de deux variables, en série ordonnée suivant les puissances croissantes des accroissements  $X - x$ ,  $Y - y$  des variables  $x, y$ ; ainsi

$$\begin{aligned} Z = z &+ \frac{dz}{dx}(X - x) + \frac{dz}{dy}(Y - y) \\ &+ \frac{1}{1.2} \left[ \frac{d^2 z}{dx^2}(X - x)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{d^2 z}{dx dy}(X - x)(Y - y) + \frac{d^2 z}{dy^2}(Y - y)^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

ou, aux infiniment petits du troisième ordre près,

$$\begin{aligned} Z = z &+ p(X - x) + q(Y - y) \\ &+ \frac{1}{1.2} [r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2], \end{aligned}$$

en posant, suivant l'usage,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2 z}{dx dy} = s, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = t.$$

Un plan parallèle au plan tangent au point M, et infiniment voisin, a pour équation

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = \varepsilon.$$

Si donc on élimine  $Z$  entre ces deux dernières équations, on a

$$r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2 = 2\varepsilon,$$

équation qui est celle de la projection de l'indicatrice sur le plan  $xy$ .

Or les projections de deux diamètres conjugués d'une conique sont des diamètres conjugués de sa projection; donc il doit en être ainsi pour les deux tangentes dont nous nous occupons, ce qui nécessite la relation

$$r + s\left(\frac{py}{z - qy} + \frac{dy}{dx}\right) + t\frac{p \cdot y \cdot dy}{dx(z - qy)} = 0$$

ou

$$[r(z - qy) + psy]dx + [s(z - qy) + pty]dy = 0.$$

C'est l'équation différentielle qui définit la courbe cherchée sur la surface  $S$ . Cette équation peut se simplifier en la mettant sous la forme

$$(6) \quad (r dx + s dy)(z - qy) + py(s dx + t dy) = 0.$$

Si, en effet, on tient compte de l'équation (4) et qu'on élimine  $z - qy$  entre elles, on a

$$p \left[ (r dx + s dy) \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - (s dx + t dy) \frac{x - a}{a^2} y \right] = 0$$

Si l'on suppose  $p = 0$ , l'équation (4) donne  $z - qy = 0$  ou  $x - a = 0$ . Dans le premier cas, l'équation (6) est vérifiée identiquement : donc les courbes déterminées par les équations

$$p = 0, \quad z - qy = 0,$$

c'est-à-dire

$$z = f(y), \quad z = y F(x),$$

sont des solutions singulières de la question; en éliminant  $z$ , on a, par l'équation

$$f(y) = y F(x),$$

les projections de ces solutions sur le plan  $xOy$ .

Dans le second cas, puisque  $r dx + s dy = dp$ , l'équation (6) est aussi vérifiée : donc les intersections du plan  $x - a = 0$  avec les cylindres  $z = f(y)$  parallèles à  $Ox$  sont de nouvelles solutions singulières. En écartant ces deux systèmes et divisant par  $p$ , on a

$$(7) \quad (r dx + s dy) \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - (s dx + t dy) \frac{x - a}{a^2} y = 0$$

ou bien, sous forme abrégée,

$$\left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dp - \frac{(x - a)y}{a^2} dq = 0.$$

Si, dans cette équation, on suppose  $z$  remplacé par sa valeur en fonction de  $x$  et de  $y$  tirée de l'équation générale de la surface  $S$

$$F \left[ \frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \frac{y}{z} \right] = 0,$$

il reste une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme

$$M dx + N dy = 0.$$

L'intégration de cette équation fait connaître la projection de la courbe cherchée sur le plan  $xOy$ . Cette intégration n'est possible qu'autant qu'on particularisera la forme de la fonction  $F$ .

*Application.* — Je considère en particulier, parmi les surfaces  $S$ , les ellipsoïdes homothétiques au proposé,

et ayant A pour centre,

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h.$$

Dans ces surfaces, on a

$$\frac{x-a}{a^2} + \frac{z}{c^2} p = 0, \quad p = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x-a}{z},$$

$$\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} q = 0, \quad q = -\frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z},$$

$$r = \frac{dp}{dx} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{z - (x-a)p}{z^2} = -\frac{c^4}{a^2 z^3} \left[ \frac{z^2}{c^2} + \frac{(x-a)^2}{a^2} \right],$$

$$s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = -\frac{c^2}{a^2} (x-a) \frac{-q}{z^2} = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3} (x-a)y,$$

$$t = \frac{dq}{dy} = -\frac{c^2}{b^2} \frac{z - qy}{z^2} = -\frac{c^4}{b^2 z^3} \left( \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'équation différentielle (7), mise sous la forme

$$(7') \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ r \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - s \frac{x-a}{a^2} y \right] dx \\ & + \left[ s \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) - t \frac{x-a}{a^2} y \right] dy = 0; \end{aligned} \right.$$

celle-ci devient

$$\frac{z^2}{a^2 c^2} \left[ \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right] dx = 0,$$

c'est-à-dire

$$dx = 0, \quad x = \text{const.}$$

Les courbes cherchées sont donc les intersections des ellipsoïdes homothétiques

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h$$

par des plans parallèles au plan  $yO'z$ .



diculaire au segment OM et passant par le milieu de ce segment.

Par le point O on peut mener, indépendamment de la normale qui a son pied au point O, trois autres normales à la conique K :

1° Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère et où l'on a  $A = 1$  et  $B = -1$ , montrer qu'une seule de ces normales est réelle et calculer les coordonnées de son pied.

2° Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.

Soient  $x_0, y_0$  les coordonnées du point M et

$$y = mx$$

l'équation d'un diamètre de la conique. Celle d'un cercle passant par les extrémités de ce diamètre et par le point M sera de la forme

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 + \lambda(y - mx)(y + mx - y_0 - mx_0) = 0,$$

en remarquant que les sécantes communes à une conique et à un cercle sont également inclinées sur les axes de la conique.

L'équation développée devient

$$\left(\frac{1}{A} - \lambda m^2\right)x + \left(\frac{1}{B} + \lambda\right)y^2 - \lambda(y_0 + mx_0)(y - mx) = 0.$$

La condition pour qu'elle représente un cercle est

$$\frac{1}{A} - \lambda m^2 = \frac{1}{B} + \lambda, \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{1 + m^2};$$

l'équation du cercle est donc

$$\left(\frac{1}{A} + \frac{m^2}{B}\right)(x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)(y_0 + mx_0)(y - mx) = 0.$$



Les coordonnées de son centre sont déterminées par les deux équations

$$2\left(\frac{1}{A} + \frac{m^2}{B}\right)x - \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)m(y_0 + mx_0) = 0,$$

$$2\left(\frac{1}{A} + \frac{m^2}{B}\right)y + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)(y_0 + mx_0) = 0.$$

Ajoutant à la première la seconde multipliée par  $m$ , on a l'équation

$$x + my = 0,$$

qui peut remplacer la première, et qu'on aurait pu écrire *a priori*, car elle représente la perpendiculaire élevée par le point O sur le diamètre  $y - mx = 0$  de la conique, qui est une corde du cercle.

On en tire

$$m = -\frac{x}{y};$$

substituant cette valeur dans la seconde équation, il vient

$$\frac{x^2}{B} + \frac{y^2}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)(y_0y - x_0x) = 0,$$

ou

$$(1) \quad Ax^2 + By^2 + \frac{A-B}{2}(y_0y - x_0x) = 0,$$

équation du lieu des centres des cercles : c'est une conique passant par l'origine, de même espèce que la proposée, et qui lui deviendrait homothétique en la faisant tourner de  $90^\circ$ .

L'équation du système de deux droites rectangulaires menées par l'origine étant

$$y^2 + kxy - x^2 = 0,$$

l'équation

$$(B + \lambda)y^2 + \lambda kxy + (A - \lambda)x^2 + \frac{A-B}{2}(y_0y - x_0x) = 0$$

sera celle d'une conique passant par l'intersection de la conique K et du système des deux droites. On peut déterminer  $\lambda$  de manière que cette conique se réduise à la tangente en O à la conique K,

$$y_0 y - x_0 x = 0,$$

et à une seconde droite passant par l'intersection des côtés de l'angle droit avec cette conique. Il faut et il suffit pour cela que l'ensemble des termes du second degré soit divisible par  $y_0 y - x_0 x$ , c'est-à-dire qu'on ait

$$(B + \lambda)y^2 + (A - \lambda)x^2 + \lambda k xy = (y_0 y - x_0 x)(ny + mx),$$

d'où

$$B + \lambda = ny_0, \quad A - \lambda = mx_0, \quad \lambda k = my_0 - nx_0,$$

et par suite

$$n = \frac{\lambda + B}{y_0}, \quad m = \frac{\lambda - A}{x_0},$$

$$\lambda k = \frac{(\lambda - A)y_0}{x_0} - \frac{(\lambda + B)x_0}{y_0},$$

$$\lambda = \frac{Bx_0^2 + Ay_0^2}{k(y_0^2 - x_0^2 - kx_0y_0)}.$$

$k$  n'entrant que dans  $\lambda$ , on peut conserver  $\lambda$  comme seul paramètre variable,

$$mx + ny = (\lambda - A)\frac{x}{x_0} + (\lambda + B)\frac{y}{y_0},$$

et l'équation de la droite cherchée est

$$\lambda \left( \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} \right) + B \frac{y}{y_0} - A \frac{x}{x_0} + \frac{A - B}{2} = 0.$$

Elle passe par le point fixe déterminé par les deux équations

$$\frac{y}{y_0} + \frac{x}{x_0} = 0,$$

$$B \frac{y}{y_0} - A \frac{x}{x_0} + \frac{A - B}{2} = 0,$$

dont les coordonnées sont

$$x_1 = \frac{A-B}{2(A+B)} x_0, \quad y_1 = -\frac{A-B}{2(A+B)} y_0.$$

La polaire de ce point par rapport à la conique K est

$$\left[ 2Ax_1 - \frac{A-B}{2} x_0 \right] x + \left[ 2By_1 + \frac{A-B}{2} y_0 \right] y + \frac{A-B}{2} (y_0 y_1 - x_0 x_1) = 0.$$

En mettant pour  $x_1$  et  $y_1$  leurs valeurs, il vient, réductions faites,

$$x_0 x + y_0 y - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2} = 0,$$

équation d'une droite perpendiculaire sur le milieu de OM, et qui est le lieu des points de concours des tangentes menées à la conique K par les points où elle est rencontrée par les côtés d'un angle droit pivotant autour du point O. Il est remarquable que ce lieu soit indépendant des axes de la conique donnée et qu'il reste le même pourvu que le centre O et le point M restent fixes.

L'équation de la normale à la conique K au point  $(x, y)$  est

$$Y - y = \frac{4By + (A-B)y_0}{4Ax - (A-B)x_0} (X - x).$$

Si elle passe par l'origine, les coordonnées de son pied satisfont à l'équation

$$4(A-B)xy - (A-B)(y_0 x + x_0 y) = 0$$

ou

$$(2) \quad 4xy - y_0 x - x_0 y = 0.$$

C'est le lieu des pieds des normales menées du point O à toutes les coniques K que l'on obtient en faisant varier la grandeur des axes de la conique donnée.

1° Dans le cas particulier où  $A = 1$ ,  $B = -1$ , l'équation de la conique donnée est

$$x^2 - y^2 = 1,$$

et l'on a

$$x_0^2 - y_0^2 = 1.$$

L'équation de la conique K devient

$$x^2 - y^2 + y_0 y - x_0 x = 0.$$

En éliminant  $y$  entre cette équation et l'équation (4), et supprimant la solution  $x = 0$ , on a l'équation

$$16x^3 - 24x_0x^2 + (9x_0^2 + 3y_0^2)x - x_0(x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

qui détermine les abscisses des pieds des trois normales autres que celle qui a son pied en O.

En posant  $x = x' + \frac{x_0}{2}$ , elle devient, eu égard  $x_0^2 - y_0^2 = 1$ ,

$$16x'^3 - 3x' - \frac{1}{2}x_0 = 0$$

ou

$$x'^3 - \frac{3}{16}x' - \frac{x_0}{32} = 0,$$

de la forme  $x'^3 + px' + q = 0$ . L'expression

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

devient ici  $\frac{y_0^2}{64} > 0$ . L'équation n'a qu'une racine réelle calculable par la formule de Cardan :

$$x' = \frac{\sqrt[3]{x_0 + y_0} + \sqrt[3]{x_0 - y_0}}{4},$$

$$x = \frac{x_0}{2} + x'.$$

On a ensuite

$$y = \frac{y_0 x}{4x - x_0};$$

on trouverait d'ailleurs

$$y = \frac{y_0}{2} + \frac{\sqrt[3]{x_0 + y_0} - \sqrt[3]{x_0 - y_0}}{4}.$$

2° Revenons au cas général, et soit

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + S = 0, \quad S = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$$

l'équation du cercle passant par les pieds des trois normales autres que celle qui a son pied en O.

En reportant la valeur  $y = \frac{y_0 x}{4x - x_0}$ , tirée de l'équation (2), d'abord dans celle du cercle, puis dans celle de la conique K, et supprimant la solution  $x = 0$ , on a les deux équations

$$\begin{array}{c|c|c|c} 16x^4 - 8x_0 & x^3 + 16\alpha x_0 & x^2 - 2\alpha x_0^2 & x + x_0^2 S = 0, \\ - 32\alpha & - 8\beta y_0 & + 2\beta y_0 x_0 & \\ & + 16S & - 8x_0 S & \\ & + x_0^2 & & \\ & + y_0^2 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 16Ax^3 - 8(2A - B)x_0 x^2 + [(SA - 4B)x_0^2 + (2A - B)y_0^2]x \\ + \frac{A - B}{2} x_0 (x_0^2 + y_0^2) = 0, \end{aligned}$$

qui déterminent les abscisses des points d'intersection de l'hyperbole (2) avec le cercle et avec la conique K. La première doit admettre les trois racines de la seconde. Écrivant que le reste de la division de leurs premiers membres est nul quel que soit  $x$ , on a, pour déterminer  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $S$ , les trois équations du premier degré

$$16A^2S - 16ACx_0\alpha - 8A^2y_0\beta + 4C^2x_0^2 - ACy_0^2 = 0,$$

$$8A^2x_0S - 8ACx_0^2\alpha - 2A(A + C)y_0^2\alpha$$

$$- 2A^2x_0y_0\beta + 2C^2x_0^3 + \frac{C^2}{2}x_0y_0^2 = 0,$$

$$A^2x_0^2S - ACx_0(x_0^2 + y_0^2)\alpha + \frac{C^2}{4}x_0^2(x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

où

$$C = A - B.$$

On en tire

$$\alpha = - \frac{A^2 - 3AB + 2B^2}{8AB} x_0, \quad \beta = - \frac{2A^2 - 3AB + B^2}{8AB} y_0,$$

$$S = - \frac{(A - B)^2}{8AB} (x_0^2 + y_0^2).$$

L'équation du cercle passant par les pieds des trois normales considérées est donc

$$(4) \begin{cases} 8AB(x^2 + y^2) + 2(A^2 - 3AB + 2B^2)x_0x \\ + 2(2A^2 - 3AB + B^2)y_0y - (A - B)^2(x_0^2 + y_0^2) = 0. \end{cases}$$

On arrive plus rapidement à cette équation de la manière suivante.

L'équation de la conique K peut s'écrire

$$x[2Ax - (A - B)x_0] + y[2By + (A - B)y_0].$$

Si l'on y remplace successivement le facteur  $y$  et le facteur  $x$  par les valeurs  $y = \frac{y_0 x}{4x - x_0}$ ,  $x = \frac{x_0 y}{4y - y_0}$ , tirées de l'équation (2), on a, en chassant les dénominateurs et supprimant la solution  $x = 0$ ,  $y = 0$ , relative au point O, les deux équations

$$\begin{aligned} & [2Ax - (A - B)x_0](4x - x_0) \\ & + [2By + (A - B)y_0]y_0 = 0, \\ & [2Ax - (A - B)x_0]x_0 + [2By + (A - B)y_0](4y - y_0) = 0, \end{aligned}$$

qui doivent être vérifiées par les coordonnées des pieds des trois normales considérées. En ajoutant ces équations multipliées respectivement par B et par A, afin de réduire au même coefficient les termes en  $x^2$  et  $y^2$ , on a

$$\begin{aligned} & 8AB(x^2 + y^2) + 2(A^2 - 3AB + 2B^2)x_0x \\ & + 2(2A^2 - 3AB + B^2)y_0y - (A - B)^2(x_0^2 + y_0^2) = 0, \end{aligned}$$

Remplaçons  $x_1, y_1, z_1$  par  $\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}$ , nous obtenons les relations

$$(1) \quad \alpha x - a^2 = \beta y - b^2 = \gamma z - c^2.$$

Or, le point dont les coordonnées sont  $x, y, z$  est le sommet du parallélépipède construit sur les axes et dont trois sommets sont les points où le plan tangent au point  $(x_1, y_1, z_1)$  rencontre les axes.

Appelons  $G_1$  le centre de gravité du triangle formé par ces trois points; il aura pour coordonnées  $\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}$ ; donc il sera sur la droite ayant pour équations

$$(2) \quad 3\alpha x - a^2 = 3\beta y - b^2 = 3\gamma z - c^2.$$

On a donc le théorème suivant :

**THÉORÈME III.** — *Si d'un point on abaisse des normales sur une série de surfaces du second degré homofocales, et que l'on mène les plans tangents aux pieds de ces normales, les centres de gravité des triangles déterminés sur ces plans par les trois axes sont sur une droite fixe.*

Le théorème que nous venons d'établir permet d'étudier les propriétés du système des normales menées d'un point à une série de surfaces homofocales; il ramène la recherche des normales à un ellipsoïde à l'intersection d'une droite et d'une surface du sixième degré ayant pour équations

$$3\alpha x - a^2 = 3\beta y - b^2 = 3\gamma z - c^2,$$

$$\frac{a^2}{9x^2} + \frac{b^2}{9y^2} + \frac{c^2}{9z^2} = 1.$$

Supposons que le point donné  $(\alpha, \beta, \gamma)$  reste fixe et que les surfaces varient en restant homofocales, la droite  $\Delta$

que nous considérons restera fixe; mais, si le point se déplace d'une manière quelconque dans l'espace, elle engendrera un *complexe*; si le point se meut sur une surface, la droite engendrera une *congruence*; enfin, si le point se meut sur une courbe, la droite engendrera une surface, et cette surface sera développable; en particulier, si le point décrit une droite, la droite  $\Delta$  engendre un cône du second ordre. Il y a là les éléments d'une étude intéressante, mais qui nous détournerait de notre but actuel.

Reprenons la relation qui existe entre les coordonnées  $\alpha, \beta$  d'un point P et les coordonnées  $x_1, y_1$  du pied d'une des normales issues de ce point; cette relation peut s'écrire

$$\frac{\alpha - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\beta - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = k.$$

Lorsque le point A qui a pour coordonnées  $x_1, y_1$  se déplace sur l'ellipse, si la quantité  $k$  reste constante, les coordonnées du point P satisferont aux deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = x_1 \frac{a^2 + k}{a^2}, \\ \beta = y_1 \frac{b^2 + k}{b^2}. \end{cases}$$

Le point P décrira donc une ellipse ayant pour équation

$$\frac{a^2 \alpha^2}{(a^2 + k)^2} + \frac{b^2 \beta^2}{(b^2 + k)^2} = 1.$$

Par un point P donné, passent quatre de ces ellipses qui sont chacune tangentes en quatre points à la développée de l'ellipse donnée; la connaissance d'une des valeurs de  $k$  correspondant à un point P équivaut à la connaissance d'une de ces ellipses ou d'une des nor-





ayant les mêmes axes en position et tangente aux trois côtés de l'un des triangles formés avec trois des quatre pieds des normales comme sommets; chacun de ces triangles donne d'ailleurs, en général, naissance à une conique distincte.

Ce théorème n'est qu'un énoncé différent du théorème précédent.

Reprenons les ellipses particulières que nous avons considérées. Si l'on donne à  $k$  diverses valeurs, on aura une série d'ellipses partageant dans un même rapport les segments des normales comptés depuis le pied de ces normales; parmi ces courbes se trouvent des droites et des cercles : les droites sont les axes de symétrie de l'ellipse donnée, et les cercles sont les cercles concentriques à l'ellipse donnée et ayant pour rayons  $a - b$  et  $a + b$ . On retrouve ainsi des résultats bien connus.

Considérons maintenant les quatre normales issues d'un point  $P(\alpha, \beta)$ , parmi lesquelles se trouve une *normale singulière* correspondant à la valeur  $k$ .

L'hyperbole équilatère qui passe par les pieds des normales a pour équation

$$(1) \quad a^2 \alpha y - b^2 \beta x - (a^2 - b^2) xy = 0.$$

L'équation qui donne les ordonnées des pieds des normales est

$$(2) \quad (a^2 - b^2)^2 y^4 + 2b^2(a^2 - b^2)\beta y^3 + \dots - b^6 \beta^2 = 0.$$

Considérons un cercle ayant pour équation

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0.$$

Les ordonnées des points de rencontre du cercle et de l'ellipse sont données par l'équation

$$(4) \quad \begin{cases} (a^2 - b^2)^2 y^4 + 4Bb^2(a^2 - b^2)y^3 + \dots \\ \dots + b^4[(a^2 + C)^2 - 4a^2 A^2] = 0. \end{cases}$$

Soit  $A(x_1, y_1)$  le pied de la *normale singulière* issue du point P, et soient  $y_2, y_3, y_4$  les pieds des trois autres normales issues du point P, points que nous désignerons par B, C, D; si le cercle représenté par l'équation (3) passe par les points B, C, D, les équations (2) et (4) auront pour solutions  $y_1, y_2, y_3, y_4$ , et  $-y_1, y_2, y_3, y_4$ . On aura donc

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{-2b^2\beta}{a^2 - b^2},$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{-4Bb^2}{a^2 - b^2}.$$

On en déduit

$$y_1 = \frac{b^2}{a^2 - b^2} (2B - \beta),$$

et, comme on a

$$y_1 = \frac{b^2\beta}{b^2 + k},$$

il vient

$$(5) \quad 2B = \frac{a^2 + k}{b^2 + \beta} \beta, \quad 2A = \frac{b^2 + k}{a^2 + k} a.$$

Donc, si l'on suppose que le point P se déplace sur l'ellipse correspondant à la valeur  $k$ , le centre T du cercle circonscrit au triangle BCD décrit une ellipse dont on a facilement l'équation à l'aide des formules (5). On trouve de même que le centre de gravité de ce triangle a pour coordonnées

$$y = -\frac{a^2 + b^2 + 2k}{3(a^2 - b^2)} y_1,$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 + 2k}{3(a^2 - b^2)} x_1.$$

Ce point G décrit donc une ellipse dont on a facilement l'équation; il en est de même pour le point de concours H des hauteurs et le centre I du cercle des neuf points du triangle. Considérons la figure formée avec les points P, A, T, G, H, I; toutes les droites de cette

figure restent, pendant leur déplacement, normales à autant d'ellipses fixes : en effet, l'une quelconque de ces droites réunit deux points dont les coordonnées sont de la forme  $(\lambda x_1, \lambda' y_1)$ ,  $(\mu x_1, \mu' y_1)$ , et il est évident que, si le point dont les coordonnées sont  $x_1, y_1$  décrit une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

les deux points que nous considérons décriront des ellipses ayant les mêmes axes en position, et la droite qui les joint sera normale à une ellipse ayant aussi les mêmes axes en position. On a donc le théorème suivant :

**THÉORÈME VI.** — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, les normales aux sommets concourent en un point P qui décrit une ellipse; le centre de gravité du triangle, le point de concours des hauteurs, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle des neuf points décrivent des ellipses, et les droites qui joignent le point P à ces points, ainsi que la droite qui joint ces points, sont normales à autant d'ellipses fixes.*

Reprenons les équations (2) et (4); elles nous donnent encore

$$y_1 y_2 y_3 y_4 = \frac{-b^6 \beta^2}{(a^2 - b^2)^2},$$

$$-y_1 y_2 y_3 y_4 = \frac{b^4 [(a^2 + C)^2 - 4a^2 A^2]}{(a^2 - b^2)^2};$$

on en tire

$$b^2 \beta^2 = (a^2 + C)^2 - 4a^2 A^2,$$

mais on a

$$2A = \frac{b^2 + k}{a^2 + k} \alpha,$$

donc

$$(a^2 + C)^2 = a^2 x^2 \left( \frac{b^2 + k}{a^2 + k} \right)^2 + b^2 \beta^2 = (b^2 + k)^2 \left( \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right),$$

d'où

$$\begin{aligned} a^2 + C &= -b^2 - k, \\ C &= -k - (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

On a donc le théorème suivant :

**THÉORÈME VII.** — *Quand un triangle se déplace restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant mêmes axes en position, le centre des ellipses a une puissance constante par rapport au cercle circonscrit au triangle, qui a, par conséquent, pour enveloppe une anallagmatique du quatrième degré.*

Lorsque la quantité  $k$  varie, toutes ces courbes du quatrième degré restent tangentes à l'ellipse donnée en quatre sommets. Supposons, en particulier, que la puissance  $C$  soit nulle, ce qui donne pour  $k$  la valeur  $-(a^2 + b^2)$ ; les valeurs  $2A$ ,  $2B$  deviennent alors

$$\begin{aligned} 2A &= -x_1, \\ 2B &= -y_1. \end{aligned}$$

Le cercle dont il s'agit est alors décrit sur un demi-diamètre de l'ellipse comme diamètre. Ce cercle, qui passe par les pieds  $B$ ,  $C$ ,  $D$  des trois normales issues du point  $P$ , passe par le point  $A'$ , symétrique du pied  $A$  à la normale singulière par rapport au centre de l'ellipse. Prenons les demi-diamètres conjugués des droites  $OA$ ,  $OC$ ,  $OD$ ; ces trois demi-diamètres détermineront sur l'ellipse trois points  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ , et les normales en ces trois points seront concourantes; soit  $P'$  leur point de concours: il est facile de voir qu'il est sur l'ellipse. Soit le point où la normale en  $B'$  rencontre le grand axe; demi-diamètre  $OB$ , perpendiculaire à cette normale,



à la valeur  $k$ , et appelant  $x_1, y_1$  les coordonnées du pied de la normale singulière issue du point P, A les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle BCD, R le rayon de ce cercle, on a, en se reportant aux formules précédemment établies,

$$C = -(a^2 + b^2 + k) = A^2 + B^2 - R^2,$$

d'où

$$(\lambda) \quad R^2 = a^2 + b^2 + k + \frac{1}{4} \left[ x_1^2 \frac{(b^2 + k)^2}{a^4} + y_1^2 \frac{(a^2 + k)^2}{b^4} \right]$$

Comme le point  $(x_1, y_1)$  est sur l'ellipse, on voit que l'expression contient le seul paramètre  $y_1^2$  au premier degré.

En appelant  $x, y$  les coordonnées du centre de gravité du triangle BCD,  $\delta$  la distance du centre de gravité au centre du cercle circonscrit et  $\Sigma^2$  la somme des carrés des côtés du triangle, on a

$$\Sigma^2 = 9(R^2 - \delta^2),$$

$$\delta^2 = (A - x)^2 + (B - y)^2,$$

$$\Sigma^2 = 9(a^2 + b^2 + k - x^2 - y^2 + 2Ax + 2By).$$

En remplaçant  $x, y, A, B$  par les valeurs qui ont été données plus haut, on trouve, après quelques simplifications,

$$(\mu) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Sigma^2}{9} &= a^2 + b^2 + k - \frac{2y_1^2}{9b^2c^2} (a^2 + b^2 + 2k)^2 \\ &+ \frac{a^2 + b^2 + 2k}{3c^2} \left( b^2 + k - a^2 \frac{a^2 + b^2 + 2k}{3c^2} \right) \end{aligned} \right.$$

On voit que cette expression est encore une fonction linéaire du paramètre  $y_1^2$ .

Enfin, cherchons à calculer la surface du triangle BCD. Rappelons que la surface du triangle dont les sommets ont pour coordonnées  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$

est donnée par l'égalité

$${}_2S = \begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Or ici on a

$$x_4 = \frac{a^2 \alpha y_4}{b^2 \beta + c^2 y_4};$$

on trouve alors

$$\frac{{}_2S}{b^2 c^2 a^2 \alpha \beta} = \frac{(\gamma_2 - \gamma_4)(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_4 - \gamma_3)}{(b^2 \beta + c^2 y_4)(b^2 \beta + c^2 y_2)(b^2 \beta + c^2 y_3)}.$$

Les quantités  $\gamma_4, \gamma_2, \gamma_3$  sont données par une équation facile à former, et l'on trouve, après un calcul assez long et qu'il est inutile de rapporter,

$$(\psi) \quad \frac{S^2}{a^2} = \gamma_1^2 \left( \frac{a^2 + b^2 + 2k}{c^2} \right)^3 - \frac{b^2}{c^2} (b^2 + k) \left( 2 + \frac{b^2 + k}{c^2} \right)^3.$$

On a donc le théorème suivant :

**THÉORÈME IX.** — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, il existe deux relations linéaires entre le carré de la surface, le carré du rayon du cercle circonscrit et la somme des carrés des trois côtés.*

Le théorème que nous venons d'établir donne la solution d'un grand nombre de questions particulières; nous allons appliquer nos formules à quelques cas simples. Remarquons d'abord que, si le coefficient du paramètre variable  $\gamma_1^2$ , qui définit le triangle dans chacune de ses positions, est nul, la fonction correspondante  $R^2$ ,  $\Sigma^2$  ou  $S^2$  est constante.

Égalons, par exemple, à zéro le coefficient de  $\gamma_1$  dans



l'expression  $(\lambda)$  qui donne  $R^2$  ; nous aurons

$$\frac{(a^2 + k)^2}{b^4} - \frac{(b^2 + k)^2}{a^2 b^2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$k = a^2 + ab + b^2$$

et

$$k = ab - a^2 - b^2.$$

La seconde valeur convient seule ; elle correspond au cas où le triangle BCD est inscrit dans l'ellipse et circonscrit à un cercle concentrique ; en transportant cette valeur de  $k$  dans les expressions de  $\Sigma^2$  et de  $S^2$ , on obtient les valeurs de ces quantités en fonction du paramètre variable  $y_1^2$ .

Si l'on considère le coefficient de  $y_1^2$  dans les expressions générales de  $\Sigma^2$  et de  $S^2$ , on voit qu'il est nul pour la même valeur  $k = -\frac{a^2 + b^2}{2}$  dans les deux expressions.

On voit donc que, quand un triangle est inscrit dans une ellipse et circonscrit à une ellipse homothétique et dont les axes sont deux fois plus petits, non seulement sa surface est constante, comme on le sait, mais aussi la somme des carrés de ses côtés, résultat très facile à vérifier par un calcul direct. On trouve alors pour  $R^2$  l'expression

$$R^2 = \frac{(3a^2 + b^2)^2}{16a^2} + y_1^2 \frac{c^6}{16a^2 b^4}.$$

Prenons un autre cas particulier. Supposons que les deux coniques auxquelles le triangle reste inscrit et circonscrit soient homofocales : on sait, d'après un beau théorème de M. Chasles, que le triangle est alors de périmètre constant ; mais alors l'expression de  $S^2$  et celle de  $\Sigma^2$  nous montrent, après l'élimination de  $y_1^2$ , qu'il existe une relation linéaire entre la somme des produits deux à deux des côtés et le produit de ces mêmes côtés. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME X. -- *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses homofocales, il existe une relation linéaire entre le produit de ses côtés et la somme de leurs produits deux à deux.*

Pour trouver cette relation numérique, il faut d'abord calculer le périmètre constant du triangle ; on trouve

$$p = \frac{b^2}{a^2 - b^2} \sqrt{2 \sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)} - a^2 - b^2} \\ + \sqrt{2a^2 - b^2 + 2 \sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)}}.$$

On peut remarquer que le carré de  $p$  ne contient qu'un seul radical, qui est

$$\sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)}.$$

Il faut trouver la valeur de  $k$  ; pour cela, nous nous servons des formules générales qui lient la valeur de  $k$  aux longueurs des axes des deux ellipses auxquelles le triangle reste inscrit et circonscrit ; ces relations sont, en appelant  $a, b, a', b'$  les demi-axes des deux ellipses,

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 1,$$

$$a^2 + k = \frac{a'}{a} (a^2 - b^2),$$

$$b^2 + k = -\frac{b'}{b} (a^2 - b^2).$$

Ces formules donnent immédiatement l'équation de l'ellipse décrite par le point de concours des normales ; cette ellipse a pour demi-axes

$$a' \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad b' \frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, on trouve

pour  $a'$  la valeur

$$a' = \frac{-ab^2 + \sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}$$

et pour  $k$  la valeur

$$k = \sqrt{b^4 + a^2(a^2 - b^2)} - a^2 - b^2.$$

En transportant cette valeur de  $k$  ainsi que la valeur de  $p$  dans les expressions de  $S^2$  et de  $\Sigma^2$ , puis en éliminant  $y_1^2$  entre ces deux relations, on trouve la relation assez compliquée, mais linéaire, entre le produit des côtés du triangle et la somme de leurs produits deux à deux. Les longueurs des trois côtés du triangle variable sont donc représentées par une équation de la forme

$$X^3 - 2pX^2 + \lambda X + m\lambda + p = 0,$$

équation dans laquelle  $\lambda$  est le seul paramètre variable.

Reprenons l'étude générale d'un triangle qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position. En se reportant aux notations précédentes et en considérant le triangle BCD, on voit que les points de contact des côtés de ce triangle avec leur enveloppe forment un triangle  $B_1C_1D_1$  ayant les mêmes propriétés que le premier; ce triangle donne à son tour naissance à un triangle  $B_2C_2D_2$ , et ainsi de suite. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble de tous ces triangles. Considérons d'abord les ellipses enveloppes des côtés de ce triangle et les quantités  $k$  qui leur correspondent. Entre deux ellipses consécutives, on a les relations

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 1,$$

$$k = a^2 - \frac{a'}{a}(a^2 - b^2) = b^2 + \frac{b'}{b}(a^2 - b^2).$$

L'ellipse suivante aura pour demi-axes  $\frac{a'^2}{a}$ ,  $\frac{b'^2}{b}$ . Donc, en posant  $\frac{a'}{a} = \lambda$ , on aura, pour déterminer la suite des axes et les quantités  $k$ , les relations

$$\begin{aligned} a' &= \lambda a, & b' &= (1 - \lambda)b, \\ a'' &= \lambda^2 a, & b'' &= (1 - \lambda)^2 b, \\ &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \\ a^{(m)} &= \lambda^m a, & b^{(m)} &= (1 - \lambda)^m b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= a^2 - \lambda(a^2 - b^2) = a^2(1 - \lambda) + \lambda b^2, \\ k_2 &= (1 - \lambda)\lambda^2 a^2 + \lambda b^2(1 - \lambda)^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ k_m &= (1 - \lambda)\lambda^m a^2 + \lambda b^2(1 - \lambda)^m. \end{aligned}$$

Pour déterminer complètement les triangles les uns par rapport aux autres, il faut déterminer la relation qui existe entre les ordonnées des pieds des normales singulières relatives aux deux points P et P<sub>1</sub> où viennent se rencontrer les normales en B, C, D et en B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>, sommets de deux triangles consécutifs. Si l'on appelle  $x_2, y_2$  les coordonnées du point B situé sur l'ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , et  $(\alpha', \beta')$  les coordonnées du point de rencontre des normales menées aux points C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub> à l'ellipse enveloppe des côtés du triangle BCD, on a les relations connues

$$\beta' = \frac{(a'^2 - b'^2).y_2(x_2^2 - a'^2)}{a'^2 y_2^2 + b'^2 x_2^2}, \quad \alpha' = \dots,$$

et, en remplaçant  $x_2$  par sa valeur en fonction de  $y_2$ , puis chassant le dénominateur, on a une relation du troisième degré en  $y_2$  qui doit donner à la fois les ordonnées des trois points B, C, D. On a, pour somme des racines,

$$y_2 + y_3 + y_4 = \frac{-\left(a'^2 - b'^2 \frac{b^2}{a^2}\right)\beta'}{\frac{b^2}{a^2}(a'^2 - b'^2)}.$$

En remplaçant cette somme des racines par sa valeur en fonction de  $\beta$ , ordonnée du point de concours des normales en B, C, D, valeur tirée des calculs faits au commencement, on voit qu'il existe deux relations de forme

$$\beta = \lambda\beta', \quad \alpha = \mu\alpha'.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME XI.** — *Si l'on considère un triangle qui se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, les normales aux sommets de ce triangle concourent en un point ; les normales aux points de contact de ses côtés avec l'enveloppe concourent en  $P_1$ , et ainsi de suite ; tous les points  $P, P_1, \dots$  décrivent des ellipses, et les droites qui joignent entre eux de toutes les manières les points  $P, P_1, \dots$ , les centres des cercles circonscrits à tous les triangles que l'on déduit du premier, les points de concours de leurs hauteurs, les centres de gravité, etc. se déplacent en restant normales à autant d'ellipses fixes.*

En reprenant nos formules, nous trouvons

$$y'_1 = y_1 \frac{(1-\lambda)(1-2\lambda)b^4}{a^4\lambda^2 - b^4(1-\lambda)^2} = y_1 \frac{(1-\lambda)(1-2\lambda)}{\frac{a^4}{b^4}\lambda^2 - (1-\lambda)^2}.$$

Pour passer au triangle suivant, il faudra changer  $\frac{a^4}{b^4}$  en  $\frac{a^4}{b^4} \times \frac{\lambda^4}{(1-\lambda)^4}$  ; l'expression de  $y''_1$  peut se mettre sous la forme

$$y''_1 = \frac{y'_1}{Uz + V},$$

en posant

$$U = \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda)(1 - 2\lambda)} \frac{a^4}{b^4},$$

$$z = \frac{\lambda^4}{(1 - \lambda)^4},$$

$$V = \frac{\lambda - 1}{1 - 2\lambda}.$$

On aura alors

$$y_1''' = \frac{y_1''}{Uz^2 + V},$$

$$y_1^{iv} = \frac{y_1'''}{Uz^3 + V}.$$

On a donc, pour l'expression générale de  $y_1^{(m)}$ ,

$$y_1^{(m)} = \frac{y_1}{(U + V)(Uz + V)(Uz^2 + V) \dots (Uz^{m-1} + V)}.$$

D'après cela, nous pouvons calculer les quantités  $R^2$ ,  $S^2$ ,  $\Sigma^2$  relatives au  $m^{\text{ième}}$  triangle, déduit du triangle BCD, en fonctions de quantités connues ; l'ordonnée  $\beta^{(m)}$  du point de concours des normales aux sommets de ce  $m^{\text{ième}}$  triangle est donnée par la relation

$$\beta^{(m)} = (\lambda - 1) \frac{\lambda^{2m} a^2 - (1 - \lambda)^{2m} b^2}{(1 - \lambda)^{2m} b^2} y_1^{(m)}.$$

On pourra donc, à l'aide de ces formules, calculer les éléments de l'un quelconque des triangles de la suite considérée, en fonction des éléments du premier triangle. On peut se proposer, relativement aux diverses quantités qui figurent dans cette question, divers problèmes d'Analyse plus ou moins intéressants ; on peut, par exemple, chercher l'équation de la courbe qui passe par les points, en nombre infini, où viennent se croiser les trois normales aux sommets de chacun des triangles déduits successivement du premier ; quand le premier

triangle est défini, chacun de ces points est connu, et la courbe qui les contient tous est définie.

La question générale que nous avons traitée, et qui se rapporte à un triangle quelconque inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position peut aussi être envisagée comme une question de maximum ou de minimum, et c'est ce que nous allons démontrer.

Considérons une ellipse donnée A, et un triangle MN inscrit dans cette ellipse et tel qu'une fonction symétrique des éléments de ce triangle soit maximum ou minimum; supposons qu'un *point quelconque* de l'ellipse puisse être pris pour l'un des sommets du triangle pendant à ce maximum ou ce minimum : ce premier sommet étant pris au hasard sur l'ellipse, le triangle minimum correspondant sera complètement déterminé *d'une seule manière*; donc il y aura une infinité de triangles répondant au maximum, et tous ces triangles inscrits à l'ellipse seront en même temps circonscrits à une ellipse qui, par raison de symétrie, aura les mêmes axes en position que l'ellipse donnée; la fonction qui sera maximum pour tous ces triangles qui se déplacent d'une manière continue sera nécessairement constante. On peut donc énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME XII.** — *Si un point quelconque d'une ellipse peut être pris pour l'un des sommets d'un triangle inscrit et qui soit tel qu'une fonction symétrique donnée de ses éléments soit maximum ou minimum, il existe une infinité de ces triangles qui sont tous circonscrits à une ellipse ayant les mêmes axes en position, et la fonction considérée est constante pour tous ces triangles.*

Les cas particuliers les plus simples du théorème que





point en Q, R, S sur les trois côtés et si l'on considère le triangle A'B'C', dont les côtés sont les perpendiculaires élevées en A, B, C aux droites PA, PB, PC, les deux rapports

$$(1) \quad \frac{QB \cdot SA \cdot RC}{QC \cdot SB \cdot RA},$$

$$(2) \quad \frac{A'B \cdot C' \cdot A'B'C}{C'B \cdot B'A \cdot A'C}$$

sont égaux.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que les triangles semblables donnent les égalités

$$\frac{QC}{PC} = \frac{BA'}{PA'}, \quad \frac{QB}{PB} = \frac{CA'}{PA'},$$

d'où

$$\frac{QC}{QB} = \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{PC}{PB}.$$

En écrivant deux autres égalités analogues, on a le théorème énoncé, qui s'applique au cas, plus général, où les perpendiculaires seraient remplacées par des droites faisant avec les droites considérées un même angle donné quelconque. (A suivre.)

## CORRESPONDANCE.

Monsieur et cher Collègue,

Le Rapport de M. Laisant (Congrès de Montpellier) donne un résumé d'une méthode de transformation des figures de notre ancien camarade G. de Longchamps. Si je n'ai pas signalé le fait dans la Note que j'ai rédigée et qu'ont publiée les *Nouvelles Annales*, c'est que la rédaction de cette Note remonte à trois ans, que les

résultats importants en ont été insérés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, et que j'ai signé le bon à tirer avant le Congrès de Montpellier et à plus forte raison avant l'impression du Rapport de M. Laisant. Je vous prie de signaler ce fait dans les *Nouvelles Annales*; car, si je fais bon marché des questions d'amour-propre, j'attache une grande importance aux questions de probité.

Veillez agréer, etc.

E. AMIGUES.

### PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE; par M. *Chasles*. Deuxième édition. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

2. LEÇONS SUR LA GÉOMÉTRIE, par *Alfred Clebsch*; recueillies et complétées par *Ferdinand Lindemann*, professeur à l'Université de Fribourg; traduites par *Adolphe Benoist*, docteur en Droit, membre de la Société mathématique de France. — Tome II. COURBES ALGÈBRIQUES EN GÉNÉRAL ET COURBES DU TROISIÈME ORDRE. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

3. ÉLÉMENTS DE CALCUL APPROXIMATIF; par *Charles Ruchonnet* (de Lausanne). Troisième édition, revue. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

4. EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES; par *Charles Ruchonnet* (de Lausanne). Quatrième édition, augmentée. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

5. ÉTUDES GÉOMÉTRIQUES ET CINÉMATIQUES. NOTE SUR

QUELQUES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ET DE CINÉMATIQUE  
et RÉPONSE AUX RÉCLAMATIONS DE M. L'ABBÉ Aoust; par  
*E.-J. Habich*, vice-président du Comité central du corps  
des ingénieurs du gouvernement du Pérou. Lima, Carlos  
Paz Soldan, 1880.

6. AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS. Editor in  
chief, J.-J. Sylvester. Associate editor in charge, Wil-  
liam E. Story. Published under the auspices of the Johns  
Hopkins University. Vol. III. Number 2. Cambridge,  
University press, printed for the editors by John Wilson  
and Son. Paris, Gauthier-Villars, 1880.

7. ATTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI, anno  
CCLXXVIII, 1880-1881; serie terza. — *Trasunti*, vol. V,  
fascicoli 1°, 2°, 3°. Roma, coi tipi del Salviucci; 1881.

### QUESTIONS.

1355. Les droites rectangulaires OX, OY sont les di-  
rections des axes d'une ellipse;

M un point de la courbe;

N le point où la normale en M rencontre l'axe OX;

MQ la perpendiculaire abaissée du point M sur OY;

MNP un triangle dont les côtés MP, NP sont respec-  
tivement égaux à MQ, NO.

Si l'on prend sur la bissectrice de l'angle MPN, et de  
chaque côté du point P, des distances PD, PD' égales  
entre elles et telles que  $PD^2 = MP \times PN$ , la circonfé-  
rence passant par les points D, D' et ayant son centre sur  
OY coupera l'axe OX aux deux foyers de l'ellipse.

(A. BOILLEAU.)

*Si l'on prend sur la bissectrice de l'angle MPN et de  
chaque côté du point P, des distances PD, PD' égales  
entre elles et telles que  $PD^2 = MP \times PN$ , la circonfé-*

# THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DANS LES COURBES ALGÈBRIQUES;

PAR M. CH. BIEHLER.

## SECONDE PARTIE.

1. Nous allons considérer maintenant le cas où le point multiple est à l'infini. Supposons-le d'abord à l'infini dans la direction de l'axe des  $y$ , et soit

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, y) = \varphi_p(x)y^{m-p} + \varphi_{p+1}(x)y^{m-p-1} + \dots \\ \quad + \varphi_{m-1}(x)y + \varphi_m(x) = 0 \end{cases}$$

l'équation de la courbe ordonnée suivant les puissances décroissantes de  $y$ ,  $\varphi_\mu(x)$  désignant d'une manière générale un polynôme de degré  $\mu$  en  $x$ .

Soit  $a$  une racine simple de l'équation  $\varphi_p(x) = 0$ .

Coupons la courbe par une droite parallèle à la droite  $x = a$  et voisine de cette droite, soit  $x = a + \varepsilon$ ; l'équation

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi_p(a + \varepsilon)y^{m-p} + \varphi_{p+1}(a + \varepsilon)y^{m-p-1} + \dots \\ \quad + \varphi_{m-1}(a + \varepsilon)y + \varphi_m(a + \varepsilon) = 0 \end{cases}$$

nous donnera les ordonnées des points d'intersection de la droite et de la courbe. Posons  $y = \frac{1}{z}$  et multiplions les deux membres de l'équation (2) par  $z^{m-p}$ ; il viendra

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_p(a + \varepsilon) + \varphi_{p+1}(a + \varepsilon)z + \dots \\ \quad + \varphi_{m-1}(a + \varepsilon)z^{m-p-1} + \varphi_m(a + \varepsilon)z^{m-p} = 0. \end{cases}$$

A chaque racine infiniment petite de l'équation (3) correspond une racine infiniment grande de l'équation (2).

Supposons

$$\varphi_{p+1}(a) = 0, \quad \varphi_{p+2}(a) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_{p+q-1}(a) = 0,$$

et soit  $\varphi_{p+q}(a)$  la première des quantités de la forme  $\varphi_p(a)$ , qui ne s'annule pas; l'équation (3) prendra la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon \left[ \varphi'_p(a) + \dots + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p!} \varphi_p^{(p)}(a) + z \varphi'_{p+1}(a) + \dots \right] \\ &\quad + z^q [\varphi_{p+q}(a) + \varepsilon' \varphi'_{p+q}(a) + \dots] = 0 \end{aligned} \right.$$

$a$  étant une racine simple de l'équation

$$\varphi_p(x) = 0,$$

on a

$$\varphi'_p(a) \gtrless 0,$$

et les termes qui suivent  $\varphi'_p(a)$  dans les premières parenthèses renferment tous soit  $\varepsilon$ , soit  $z$  en facteur; il en est de même pour les termes renfermés dans les secondes parenthèses, à l'exception du premier.

Quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, l'équation (4) acquiert  $q$  racines nulles, et on pourra l'écrire sous la forme

$$(5) \quad \varepsilon [\varphi'_p(a) + \alpha] + z^q [\varphi_{p+q}(a) + \beta] = 0,$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des quantités qui sont aussi voisines de zéro que l'on veut lorsqu'on substitue à  $z$ , dans les parenthèses, l'une des  $q$  racines voisines de zéro qu'acquiert l'équation (4) pour de petites valeurs de  $\varepsilon$ . On pourra donc, en raisonnant comme nous l'avons fait dans première Partie (1), représenter par la formule

$$(6) \quad z^q = - \frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)} \varepsilon$$

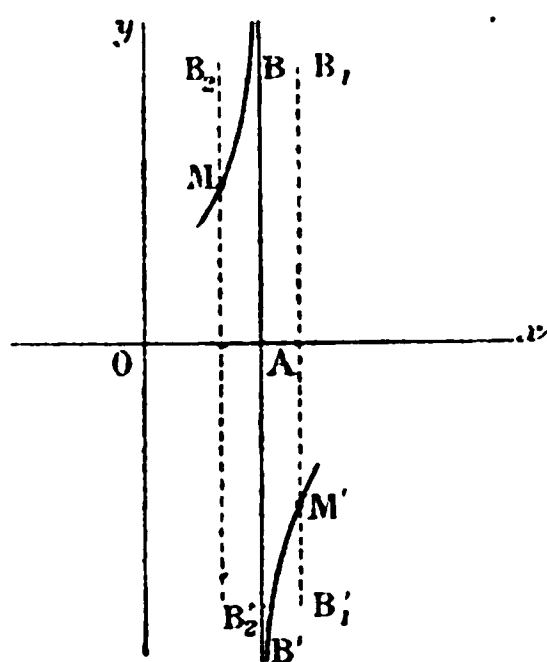
---

(1) Voir le numéro de novembre 1880 des *Nouvelles Annales Mathématiques*.

les valeurs approchées des  $q$  racines infiniment petites de l'équation (4). Si  $q$  est impair, l'équation (6) n'a qu'une seule racine réelle, et cette racine est de signe contraire à celui de  $\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}$ .

Soit  $OA = a$  (fig. 1) et supposons le rapport  $\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}$  positif; pour une valeur positive de  $\varepsilon$ , la racine réelle de l'équation (6) est négative; on obtient donc un point  $M'$

Fig. 1.

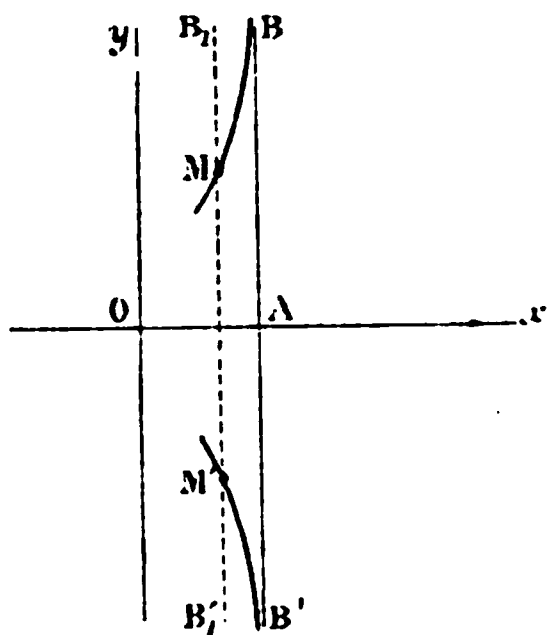


du côté des  $y$  négatifs sur la droite  $B_1 B'_1$ , dont l'équation est  $x = a + \varepsilon$ ; quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, cette racine tend vers la branche  $B' M'$ ; pour des valeurs négatives de  $\varepsilon$ , on obtient la branche  $BM$ ; ces deux branches sont asymptotes à  $AB$  de part et d'autre de cette droite, et le signe du rapport  $\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}$  donne la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Supposons maintenant  $q$  pair et  $\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}$  positif; pour les valeurs positives de  $\varepsilon$ , toutes les racines infiniment petites de l'équation (5) sont imaginaires; si, au contraire, on donne à  $\varepsilon$  des valeurs négatives, deux des racines infiniment petites de l'équation (5) sont réelles;

l'une d'elles est positive et l'autre négative. On a donc, sur la droite  $B_1 B'_1$  (*fig. 2*), deux points l'un dans la région des  $y$  positifs, l'autre dans la région des  $y$  négatifs. Quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, les deux r

Fig. 2.



considérées engendrent les branches MB, M'B' s d'un même côté de l'asymptote.

On voit que l'équation (5) a une forme analogue à celle que présente l'équation (7) de la première Partie. Ce dernier cas correspond à celui où le point est un point de flexion.

Ce que l'on vient de dire de la racine simple  $a$  s'applique à toutes les autres racines simples de cette équation; on construira donc de la même manière toutes les branches infinies fournies par les autres racines.

**2.** Considérons maintenant le cas où  $\varphi_p(x) = 0$  a une racine double  $a$ ; dans ce cas,

$$\varphi'_p(a) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''_p(a) > 0;$$

l'équation (3) pourra donc s'écrire

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi_p''(a) + \dots + \frac{\varepsilon^p}{p!} \varphi_p^{(p)}(a) \\ & + z [\varphi_{p+1}(a) + \varepsilon \varphi_{p+1}'(a) + \dots] + \dots \\ & + z^{m-p} \left[ \varphi_m(a) + \varepsilon \varphi_m'(a) + \dots + \frac{\varepsilon^m}{m!} \varphi_m^{(m)}(a) \right]. \end{aligned} \right.$$

Supposons que  $a$  n'annule pas la fonction  $\varphi_{p+1}(x)$ ; dans ce cas, l'équation (7) pourra s'écrire

$$(8) \quad \frac{\varepsilon^2}{1.2} [\varphi_p''(a) + \alpha] + z [\varphi_{p+1}(a) + \beta] = 0,$$

analogue à l'équation (11) de la première Partie.

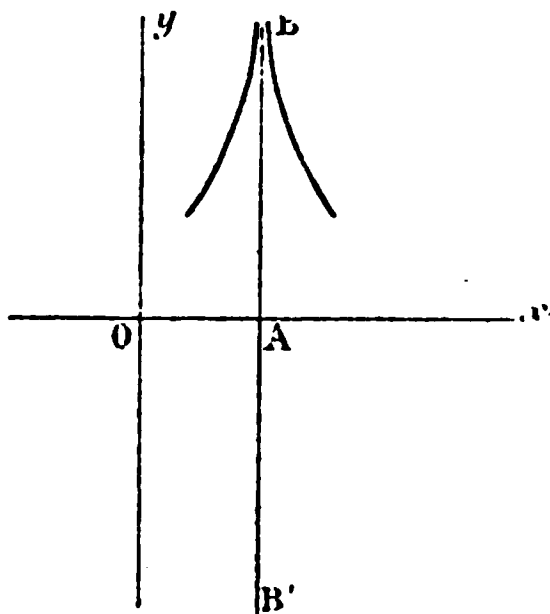
Les quantités  $\alpha$  et  $\beta$  sont aussi petites que l'on veut lorsque  $z$  désigne la racine infiniment petite de l'équation (8).

La valeur approchée de  $z$  est l'expression

$$z = - \frac{\varphi_p''(a)}{\varphi_{p+1}(a)} \frac{\varepsilon^2}{1.2}.$$

On voit aisément qu'à cette racine correspondent deux

Fig. 3.



branches de courbe analogues à celles de la *fig. 3*, construite dans l'hypothèse  $-\frac{\varphi_p''(a)}{\varphi_{p+1}(a)} > 0$ .



Ces considérations s'appliquent à toutes les racines doubles de l'équation  $\varphi_p(x) = 0$  qui n'annulent pas  $\varphi_{p+1}(x)$ .

3. Considérons maintenant le cas où  $\varphi_{p+1}(a) = 0$  et  $\varphi'_{p+1}(a) \geq 0$ , ainsi que  $\varphi_{p+2}(a) \geq 0$ ,  $a$  étant toujours une racine double de  $\varphi_p(x) = 0$ .

L'équation (3) prendra alors la forme

$$(9) \quad \frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi''_p(a) + z\varepsilon \varphi'_{p+1}(a) + z^2 \varphi_{p+2}(a) + \gamma = 0,$$

$\gamma$  étant une somme de termes qui sont tous infiniment petits devant les trois premiers pour des valeurs infiniment petites de  $\varepsilon$  et de  $z$ .

Posons

$$z = \zeta \varepsilon;$$

l'équation (9), après cette substitution, renferme dans son premier membre  $\varepsilon^2$  en facteur; si l'on débarrasse le premier membre de ce facteur, il vient

$$(10) \quad \frac{1}{1.2} \varphi''_p(a) + \zeta \varphi'_{p+1}(a) + \zeta^2 \varphi_{p+2}(a) + \gamma' = 0,$$

$\gamma'$  étant une somme de termes qui renferment tous  $\varepsilon$  en facteur.

Quand  $\varepsilon$  est très petit, la fonction  $\zeta$  a une valeur aussi voisine que l'on veut de l'une des racines de l'équation du second degré

$$(11) \quad \frac{1}{1.2} \varphi''_p(a) + \zeta \varphi'_{p+1}(a) + \zeta^2 \varphi_{p+2}(a) = 0.$$

Soient  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  les racines de cette dernière équation; supposons  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  réelles et inégales; les deux racines de l'équation en  $z$  qui tendent vers zéro auront pour valeurs approchées

$$z = \zeta_0 \varepsilon, \quad z = \zeta_1 \varepsilon;$$

par suite, si  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  sont de même signe, la courbe présentera une disposition analogue à celle de la *fig. 4* ( $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  sont supposés positifs), et si  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  sont de signes

Fig. 4.

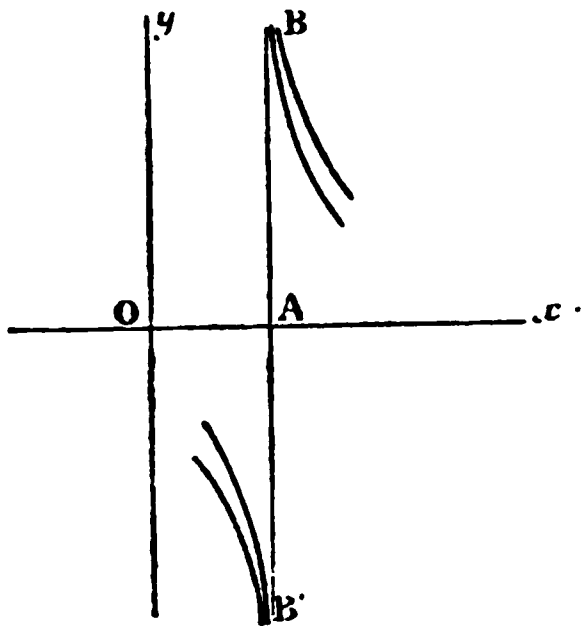
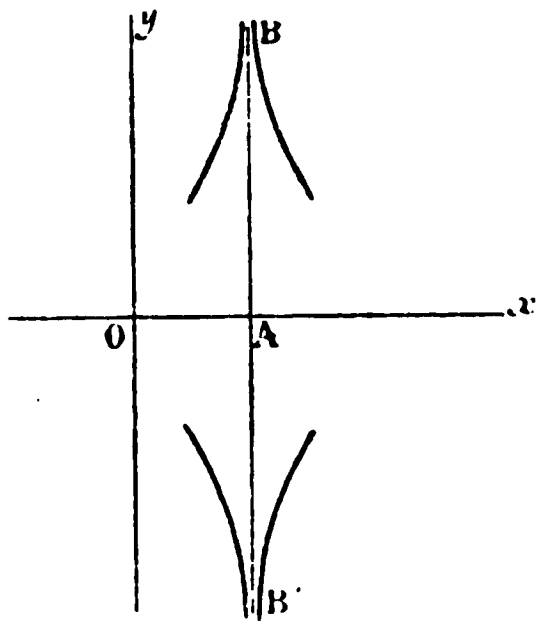


Fig. 5.



contraires, la courbe présentera une disposition analogue à celle de la *fig. 5*.

Si les racines de l'équation (11) sont imaginaires, il n'y a pas de branches réelles asymptotes à la droite  $BB'$ . Enfin si les racines de l'équation (11) sont égales, elle prendra la forme

$$(12) \quad \varphi_{p+2}(a)(\zeta - \zeta_0)^2 + A\varepsilon + B\varepsilon^2 + C\varepsilon^3 + \dots = 0,$$

et, par suite,

$$\zeta - \zeta_0 = \pm \sqrt{-\frac{A\varepsilon + B\varepsilon^2 + \dots}{\varphi_{p+2}(a)}};$$

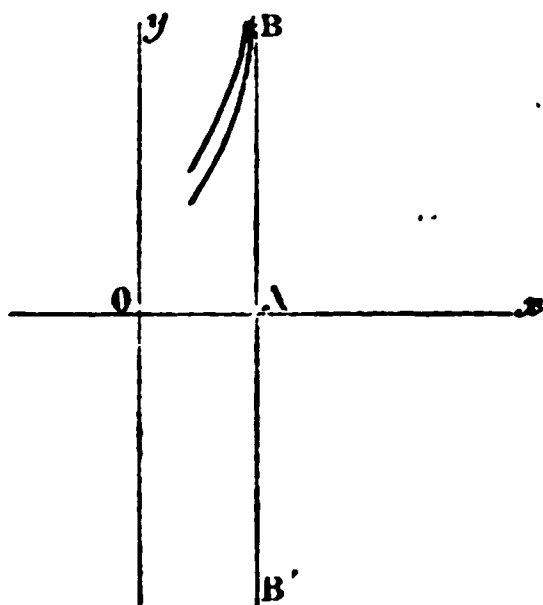
les deux valeurs de  $\zeta$  qui ont pour limite  $\zeta_0$  ont donc pour valeurs approchées

$$\zeta = \zeta_0 \pm \sqrt{-\frac{A}{\varphi_{p+2}(a)}}\varepsilon$$

et nous donnent une disposition de la courbe analogue à

celle de la *fig. 6*, qui correspond au rebroussement de seconde espèce.

Fig. 6.



4. Nous avons actuellement à examiner le cas où

$$\varphi_{p+1}(a) = 0, \quad \varphi_{p+2}(a) = 0, \quad \varphi_{p+N-1}(a) = 0, \quad \varphi_{p+N}(a) \geq 0, \\ \varphi'_{p+1}(a) = 0, \quad \varphi'_{p+2}(a) = 0, \quad \varphi'_{p+N-1}(a) = 0, \quad \varphi'_{p+N}(a) \geq 0.$$

En introduisant ces hypothèses dans l'équation (3), elle prend la forme

$$(13) \quad \frac{\varepsilon^2}{1.2} \varphi''_p(a) + \varepsilon z^n \varphi'_{p+n}(a) + z^N \varphi_{p+N}(a) + \delta = 0,$$

$\delta$  étant une somme d'un nombre fini de termes qui sont infiniment petits devant l'un des trois termes mis en évidence.

Les développements dans lesquels nous sommes entrés pour traiter complètement ce qui se rapporte à l'équation (17) de la première Partie nous dispensent d'insister sur l'étude de l'équation (13). Nous nous bornerons donc à énoncer les résultats suivants :

1° Si  $n \geq N$ , les branches qui accompagnent  $BB'$  offrent la disposition de la *fig. 3*, dans le cas de  $N$  impair; et dans le cas de  $N$  pair il n'y a pas de branches accompagnant la droite  $x = a$ , ou bien elles offrent la disposition de la *fig. 5*.

2° Si  $n < N$ ,  $N = 2n$ , on obtient les *fig. 7* et 8 si  $n$  est pair et si les racines de l'équation en  $\zeta^n$

$$(14) \quad \frac{1}{1.2} \varphi_p''(\alpha) + \zeta^n \varphi_{p+n}'(\alpha) + \zeta^{2n} \varphi_{p+2n}(\alpha) = 0$$

sont réelles et inégales.

Si les racines de l'équation (14) sont égales, la courbe présente une forme analogue à celle de la *fig. 7*.

Enfin, si les racines de l'équation (14) sont imagi-

Fig. 7.

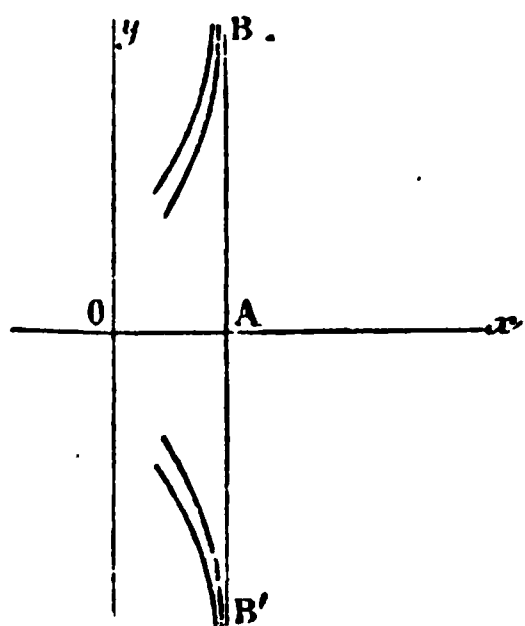
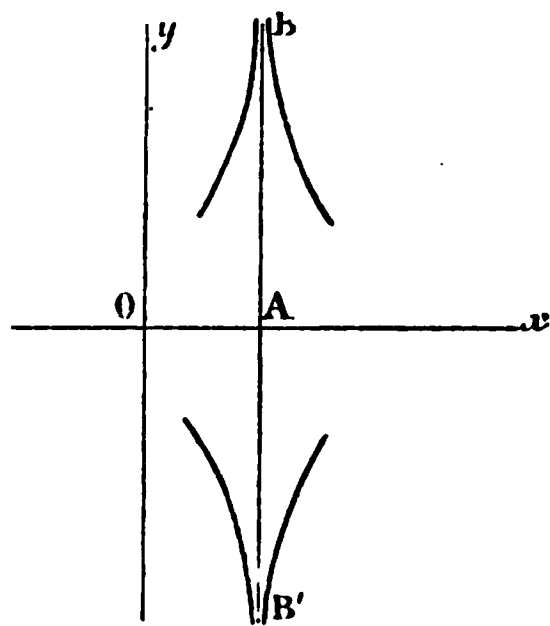


Fig. 8.



naires, il n'y a pas de branches réelles qui accompagnent la droite  $BB'$ .

La discussion se fait d'ailleurs comme dans la première Partie; nous n'insisterons pas et nous allons passer au cas des asymptotes non parallèles à l'axe des  $y$ .

5. Considérons maintenant le cas où le point est à l'infini dans une direction autre que celle de l'axe des  $y$ , et soit

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, y) = f_m(x, y) + f_{m-1}(x, y) + \dots \\ \quad \quad \quad + f_1(x, y) + f_0 = 0 \end{cases}$$

l'équation de la courbe.

Dans cette équation,  $f_\mu(x, y)$  désigne d'une manière générale l'ensemble homogène des termes du degré  $\mu$ .

Cette équation peut s'écrire

$$(2) \quad \begin{cases} x^m f_m\left(1, \frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + x f_1\left(1, \frac{y}{x}\right) + f_0 = 0, \end{cases}$$

ou bien, en posant  $f_\mu\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi_\mu\left(\frac{y}{x}\right)$ ,

$$(3) \quad x^m \varphi_m\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} \varphi_{m-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \dots + x \varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_0 = 0.$$

Si l'on fait, en outre,

$$\frac{y}{x} = a + y', \quad x = \frac{1}{x'},$$

$a$  étant une racine de l'équation

$$\varphi_m(u) = 0,$$

l'équation (3) deviendra, après en avoir multiplié les deux membres par  $x'^m$ ,

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_m(a + y') + x' \varphi_{m-1}(a + y') + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + x'^{m-1} \varphi_1(a + y') + x'^m \varphi_0 = 0. \end{cases}$$

Si l'on développe les expressions  $\varphi_\mu(a + y')$  et si l'on remarque que

$$\varphi_m(a) = 0,$$

l'équation (4) deviendra

$$(5) \quad \begin{cases} y' \varphi'_m(a) + x' \varphi_{m-1}(a) \\ \qquad + \frac{y'^2}{1.2} \varphi''_m(a) + x' y' \varphi'_{m-1}(a) + x'^2 \varphi_{m-2}(a) + \dots \\ \qquad + \frac{y'^m}{m!} \varphi^{(m)}_m(a) + \frac{x' y'^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}_{m-1}(a) + \dots \\ \qquad \qquad \qquad + x'^m \varphi_0 = \Phi(x', y') = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$y' = \lambda x',$$

l'équation (5) prendra la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & x' [\lambda \varphi'_m(a) + \varphi_{m-1}(a)] \\ & + x'^2 \left[ \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \varphi''_m(a) + \lambda \varphi'_{m-1}(a) + \varphi_{m-2}(a) \right] + \dots \\ & + x'^m \left[ \frac{\lambda^m}{m!} \varphi^{(m)}_m(a) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}_{m-1}(a) + \dots + \varphi_0 \right] = 0 \end{aligned} \right.$$

ou, après la suppression du facteur  $x'$ ,

$$(7) \quad \psi_1(\lambda) + x' \psi_2(\lambda) + \dots + x'^{m-1} \psi_m(\lambda) = 0,$$

en posant, pour abrégé,

$$\psi_\mu(\lambda) = \frac{\lambda^\mu}{\mu!} \varphi^{(\mu)}_m(a) + \frac{\lambda^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \varphi^{(\mu-1)}_{m-1}(a) + \dots + \varphi_{m-\mu}(a).$$

Dans le cas le plus général où un certain nombre de fonctions  $\psi_\mu(\lambda)$  sont identiquement nulles, par exemple dans le cas où  $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \dots, \psi_{p-1}(\lambda)$  sont identiquement nulles, l'équation (7) prend la forme

$$(8) \quad x'^{p-1} \psi_p(\lambda) + x'^p \psi_{p+1}(\lambda) + \dots + x'^{m-1} \psi_m(\lambda) = 0$$

ou, après la suppression du facteur  $x'^{p-1}$ ,

$$(9) \quad \psi_p(\lambda) + x' \psi_{p+1}(\lambda) + \dots + x'^{m-p} \psi_m(\lambda) = 0.$$

Cette équation est de même forme que l'équation (3) de la première Partie.

**6.** On voit aisément que si l'on construit, dans le voisinage de l'origine, la courbe représentée par l'équation (5),  $\Phi(x', y') = 0$ , cela équivaudra à la construction de la courbe (1) à l'infini dans la direction fournie par la racine  $a$  de l'équation  $\varphi_m(u) = 0$ .

En effet, nous avons posé

$$\frac{y}{x} = a + y', \quad x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \lambda x';$$

on en tire

$$y = ax + \lambda.$$

Si nous faisons ensuite

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon,$$

cela reviendra évidemment à couper la courbe par une droite parallèle à la droite  $y = ax + \lambda_0$ .

Cette droite  $y = ax + \lambda_0$  est asymptote à la courbe si  $\lambda_0$  a été déterminé de manière que l'équation en  $x'$  acquière une nouvelle racine nulle; par suite, l'équation en  $x$  acquerra une nouvelle racine infinie. L'équation  $y = ax + \lambda_0 + \varepsilon$  sera alors celle d'une parallèle à l'asymptote  $y = ax + \lambda_0$  et aussi voisine que l'on voudra de cette droite pour des valeurs suffisamment petites de  $\varepsilon$ .

Les équations (7) ou (9) entre les quantités  $x'$  et  $\lambda$  deviennent, en posant  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ , des équations entre les infiniment petits  $x'$  et  $\varepsilon$ ; elles nous donneront, par des raisonnements identiques à ceux de la première Partie, les valeurs approchées infiniment petites de  $x'$  pour des valeurs très petites de  $\varepsilon$ , et, par suite, le signe de ces valeurs de  $x'$  pour des valeurs soit positives, soit négatives de  $\varepsilon$ . Donner à  $\varepsilon$  des valeurs positives, c'est couper la courbe par des parallèles à l'asymptote  $y = ax + \lambda_0$  situées au-dessus de cette droite; les valeurs négatives de  $\varepsilon$  donnent des parallèles à l'asymptote situées au-dessous de cette droite.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce point, la discussion étant identique à celle que nous avons développée précédemment. Nous allons, en terminant, rappeler

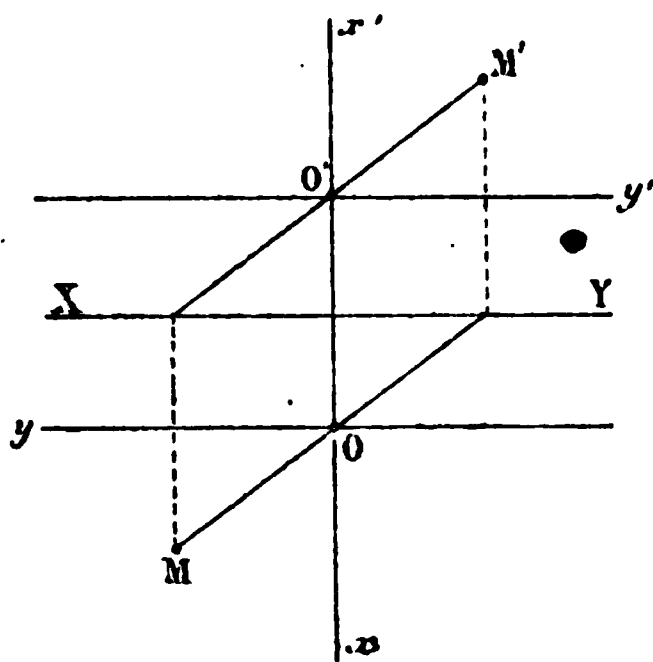
une propriété remarquable de la courbe représentée par l'équation (5) en  $x', y'$ , que nous avons désignée par

$$\Phi(x', y') = 0.$$

La courbe  $\Phi(x', y') = 0$  peut être considérée comme une transformée par perspective de la courbe représentée par  $F(x, y) = 0$ .

Si l'on conçoit, en effet, un système de deux plans rectangulaires (*fig. 9*) qui se coupent suivant la droite  $XY$ ,

Fig. 9.



et un point  $o$  dont les distances aux deux plans soient égales entre elles et à l'unité : soient  $O, O'$  les projections de  $o$  sur les deux plans. Si l'on unit un point quelconque  $M$  du premier plan au point  $o$  par une droite, cette droite vient percer le second plan en un point  $M'$ , qui est la perspective du point  $M$ . Si l'on rapporte les positions de  $M$  et de  $M'$  respectivement aux axes  $xOy, x'O'y'$ , on a, entre les coordonnées  $x, y, x', y'$  des points  $M$  et  $M'$ , les relations

$$\frac{y}{x} = y', \quad x = \frac{1}{x'};$$

par suite, si le point  $M$  décrit dans le premier plan la courbe  $F(x, y) = 0$ , le point  $M'$  décrira dans le second



plan la courbe  $\Phi(x', y' - a) = 0$ . Cette équation prend la forme  $\Phi(x', y') = 0$  par une translation de l'axe des  $y'$ .

La courbe  $\Phi(x', y') = 0$  peut donc être considérée comme une perspective de la première.

## THÉORÈMES SUR LES NORMALES A L'ELLIPSE ;

PAR M. WEILL.

[ FIN (1). ]

Dans le cas du problème proposé, le rapport (2) est égal à l'unité, puisqu'il existe une conique tangente aux côtés du triangle  $A'B'C'$  aux points A, B et C. Le rapport (1) est donc aussi égal à l'unité. Par suite, si l'on désigne par  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  les distances du point P aux six droites menées par chacun des points A, B et C, perpendiculairement aux côtés qui aboutissent en ces points, l'équation du lieu du point P sera

$$\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'.$$

Ce lieu, qui est du troisième degré, a pour centre le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et pour asymptotes les perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés ; il passe par les trois points A, B, C, par le centre du cercle circonscrit au triangle, le point de concours de ses hauteurs et les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle.

Cherchons maintenant le lieu des sommets  $A', B', C'$  du triangle obtenu en menant des tangentes à la conique

(1) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 68.



courbe connue du troisième degré et différente de la précédente. Or, les abscisses des points  $P'$  et  $P''$  ne dépendent que d'un radical carré; il en est donc de même des abscisses des points  $B', B'', C', C''$ , puisque les deux courbes du troisième degré qui contiennent ces points passent toutes deux par le point  $A$ .

Si l'on considère une des coniques circonscrites au triangle  $ABC$  et telle que les normales en  $A, B$  et  $C$  soient concourantes en un point  $P$ , si l'on projette ce point en  $Q, R, S$  sur les trois côtés, il existera, d'après le théorème de Géométrie que nous avons établi, une conique tangente aux trois côtés du triangle  $ABC$  aux points  $Q, R, S$ . Dès lors, si l'on projette le point  $P$  en  $Q', R', S'$  sur les côtés du triangle  $QRS$ , il y aura une troisième conique tangente aux côtés du triangle  $QRS$  aux points  $Q', R', S'$ , et ainsi de suite. M. Laguerre a énoncé sous forme de question (*Nouvelles Annales*, question 1341, mars 1880), une proposition qui est, au fond, identique à la précédente.

Sans développer davantage ce sujet, nous énoncerons une dernière propriété :

**THÉORÈME XIV.** — *Lorsqu'un triangle est inscrit et circonscrit à deux ellipses ayant les mêmes axes en position, si l'on pose  $t = \tan \frac{\varphi}{2}$ ,  $\varphi$  étant le paramètre angulaire de l'un des sommets, l'équation qui donne à chaque instant les trois valeurs de  $t$  sera*

$$t^3 + \lambda t^2 + Ct + \frac{\lambda}{C} = 0,$$

*dans laquelle  $C$  est une constante et  $\lambda$  un paramètre variant avec la position du triangle.*

---

## SURFACES APPLICABLES SUR DES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. A. PICART.

1. M. Haton de la Goupillière, dans une Communication faite à la Société philomathique le 17 mars 1867, a donné la solution de la question suivante :

*Quelles sont les surfaces sur lesquelles on peut tracer un réseau isotherme ou isométrique, c'est-à-dire décomposant la surface en carrés infiniment petits, qui soit formé de lignes géodésiques et de leurs trajectoires orthogonales?*

Il a trouvé, en considérant la forme de l'élément linéaire de la surface qui est propre aux systèmes isométriques, savoir

$$(1) \quad ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2).$$

que les seules surfaces jouissant de cette propriété sont les surfaces applicables sur des surfaces de révolution.

2. Ce résultat peut s'établir immédiatement à l'aide des principes les plus simples de la Géométrie des surfaces.

Il suffit de se rappeler l'expression de la *courbure géodésique*  $\left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)$  des lignes d'un réseau orthogonal et le théorème de Gauss qui en est une conséquence.

Soit, en effet, un réseau isométrique formé par des lignes géodésiques (X) et leurs trajectoires orthogonales (Y). Les éléments de lignes géodésiques compris entre deux trajectoires orthogonales infiniment voisines étant égaux, d'après le théorème de Gauss, les carrés

compris entre ces deux mêmes trajectoires sont tous égaux ; par suite, la *courbure géodésique* de chacune des trajectoires, qui est égale (si l'on désigne par  $dy$  l'élément de trajectoire et par  $\delta x$  l'élément de ligne géodésique) à  $\frac{\delta dy}{dy \delta x}$ , est constante. *Le système des trajectoires est donc formé de lignes d'égale courbure géodésique.*

Or, il est facile de démontrer le théorème suivant :

*Quand il existe sur une surface un système de lignes géodésiques ayant pour trajectoires orthogonales un système de lignes d'égale courbure géodésique, ou, en d'autres termes, quand on peut tracer sur une surface un système de lignes parallèles de courbure géodésique constante, la surface est nécessairement applicable sur une surface de révolution.*

En effet, la courbure géodésique de ces lignes peut être regardée comme une fonction de l'arc  $s$  qu'elles déterminent sur une certaine ligne géodésique, à partir d'un point fixe, pris pour origine ; dès lors, si l'on considère la surface de révolution sur laquelle la courbure géodésique des parallèles soit exprimée par la même fonction de l'arc de méridienne, on voit que les deux surfaces pourront être décomposées en carrés infiniment petits, respectivement égaux entre eux, et, par suite, seront applicables l'une sur l'autre.

Mais quelle est la surface de révolution sur laquelle la courbure géodésique des parallèles est une fonction  $\varphi(s)$  de l'arc de méridienne ?

Si l'on désigne par  $x$  le rayon d'un parallèle, on trouve l'équation différentielle

$$(2) \quad \frac{dx}{x ds} + \varphi(s) = 0,$$

dont l'intégrale première est

$$(3) \quad x = C e^{-\int_0^s \varphi(s) ds}.$$

C'est là l'équation de la méridienne. Il y entre un paramètre arbitraire  $C$ . Si l'on fait varier ce paramètre, on a une infinité de surfaces de révolution toutes applicables les unes sur les autres. Elles forment une famille dont les surfaces individuelles se distinguent par la valeur du module  $C$ .

Le théorème précédent permet de reconnaître immédiatement que *les hélicoïdes sont applicables sur des surfaces de révolution*, propriété découverte par Bour, car il est évident que les hélices décrites par les différents points du profil générateur sont des lignes parallèles et de courbure géodésique constante.

Il y a plus, on peut trouver très simplement, en s'appuyant sur les mêmes principes, la relation qui existe entre le profil générateur de l'hélicoïde et la méridienne de la surface de révolution.

Soit  $L$  le profil de l'hélicoïde rapporté à l'axe  $Oy$  de la surface et à la perpendiculaire  $Ox$ . Considérons l'hélice décrite par le point  $M$ , dont les coordonnées sont  $x$  et  $y$ . Si  $p$  est le *pas* de la surface, la tangente à cette hélice en  $M$  fait avec l'axe un angle  $\alpha$  dont la tangente est  $\frac{2\pi x}{p}$ . Si l'on désigne par  $\varepsilon$  et  $\lambda$  les angles que la tangente en  $M$  au profil fait avec  $Ox$  et avec la tangente à l'hélice, on trouve, pour la courbure géodésique  $G$  de l'hélice sur l'hélicoïde,

$$(4) \quad G = -\frac{\sin^2 \alpha}{x} \frac{\cos \varepsilon}{\sin \lambda},$$

$$\text{car } \frac{1}{p} = \frac{\sin^2 \alpha}{x} \text{ et } \cos \theta = -\frac{\cos \varepsilon}{\sin \lambda}, \text{ ou}$$

$$(5) \quad G = -\frac{\sin^2 \alpha \cos \varepsilon}{x \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon \cos^2 \alpha}},$$

puisque  $\cos \lambda = \sin \varepsilon \cos \alpha$ , ou enfin, en remplaçant  $\sin^2 \alpha$ ,  $\cos^2 \alpha$ ,  $\cos \varepsilon$ ,  $\sin \varepsilon$  respectivement par

$$(6) \quad G = - \frac{\frac{4\pi^2 x^2}{p^2 + 4\pi^2 x^2}, \frac{p^2}{p^2 + 4\pi^2 x^2}, \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}}{\sqrt{(p^2 + 4\pi^2 x^2) \left[ p^2 + 4\pi^2 x^2 + 4\pi^2 x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]}}.$$

Telle est la courbure géodésique des hélices exprimée en fonction de l' $x$  des différents points du profil et du coefficient différentiel  $\frac{dy}{dx}$ . Il faut exprimer cette courbure en fonction de l'arc de *ligne géodésique* qui leur est orthogonal.

Or, en appelant  $s$  cet arc et  $\sigma$  l'arc du profil, on a évidemment

$$(7) \quad ds = d\sigma \sin \lambda,$$

d'où, en remplaçant  $d\sigma$  et  $\sin \lambda$  par leurs valeurs,

$$(8) \quad ds = \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{p^2 + 4\pi^2 x^2}} dx.$$

Si l'on suppose le profil connu,  $x$  est, en vertu de cette dernière formule, une certaine fonction de  $s$  qui, mise à la place de  $x$  dans l'équation (6), donnera la courbure géodésique des hélices en fonction de l'arc  $s$ . Si l'on désigne par  $\varphi(s)$  cette fonction, la courbe méridienne de la surface de révolution sur laquelle l'hélicoïde est applicable aura pour équation

$$(9) \quad x = C e^{-\int_0^s \varphi(s) ds}.$$

Réciproquement, connaissant la fonction  $\varphi(s)$  qui exprime la variation de la courbure géodésique des parallèles d'une surface de révolution donnée, on pourra déterminer le profil générateur de l'hélicoïde sur lequel cette surface est applicable. Il sera donné par les formules (9) et (8). De la formule (9) on tirera la valeur de  $s$  en  $x$ , par suite celle de  $ds$ , et l'on portera cette dernière dans (8), ce qui donnera une équation différentielle entre  $x$  et  $\frac{dy}{dx}$  dont l'intégration fournira l'équation du profil.

Remarquons que de l'équation (8) et de l'équation (6), où l'on remplace  $G$  par  $\varphi(s)$ , on déduit l'équation

$$\varphi(s) ds + \frac{4\pi^2 x dx}{p^2 + 4\pi^2 x^2} = 0,$$

qui, intégrée, donne

$$(10) \quad p^2 + 4\pi^2 x^2 = e^{-2 \int \varphi(s) ds}.$$

Comme application de ces formules, nous chercherons d'abord quelle est la surface de révolution sur laquelle peut s'appliquer la surface de vis à filet carré.

Le profil générateur étant une droite perpendiculaire à l'axe, on a

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

par suite

$$s = x \quad \text{et} \quad G = - \frac{4\pi^2 s}{p^2 + 4\pi^2 s^2}.$$

L'équation de la courbe méridienne de la surface de révolution cherchée est alors

$$(11) \quad x = \frac{C}{p} \sqrt{p^2 + 4\pi^2 s^2}.$$

On reconnaîtra là l'équation des courbes dérivées de



la chaînette, car, en posant  $\frac{2\pi C}{p} = k$ ,  $\frac{p}{2\pi} = h$ , on peut la mettre sous la forme

$$x = k\sqrt{h^2 + s^2},$$

qui ne diffère que par le module  $k$  de l'équation de la chaînette

$$x = \sqrt{h^2 + s^2}.$$

On obtient cette dernière équation en supposant  $C = h$ .

La surface de vis à filet carré n'est pas le seul hélicoïde applicable sur la surface de révolution qu'engendre la chaînette et que Bour a appelée *alysséide*.

Proposons-nous, en effet, de trouver le profil des hélicoïdes applicables sur l'alysséide.

Pour cette surface, la fonction  $\varphi(s)$  qui exprime la courbure géodésique des parallèles est  $-\frac{s}{h^2 + s^2}$ ; par conséquent, l'équation (10) devient, dans ce cas,

$$p^2 + 4\pi^2 x^2 = m(h^2 + s^2),$$

$m$  désignant une constante, d'où

$$s = \sqrt{\frac{4\pi^2 x^2 + p^2 - mh^2}{m}}$$

et

$$\frac{ds}{dx} = \frac{4\pi^2 x}{\sqrt{m}\sqrt{4\pi^2 x^2 + p^2 - mh^2}}.$$

Portant cette valeur de  $\frac{ds}{dx}$  dans l'équation (8), on a

$$\frac{16\pi^4 x^2}{m(4\pi^2 x^2 + p^2 - mh^2)} = \frac{p^2 + 4\pi^2 x^2 + 4\pi^2 x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{p^2 + 4\pi^2 x^2},$$

d'où

$$1) \quad dy = \frac{dx}{2\pi x \sqrt{m}} \sqrt{p^2 + 4\pi^2 x^2} \sqrt{\frac{4\pi^2(4\pi^2 - m)x^2 - m(p^2 - mh^2)}{4\pi^2 x^2 + p^2 - mh^2}}.$$

Telle est l'équation différentielle du profil de l'hélicoïde.

Si l'on pose

$$x^2 = z,$$

d'où

$$dx = \frac{dz}{2x},$$

elle devient

$$dy = \frac{dz}{4\pi z \sqrt{m}} \frac{\sqrt{p^2 + 4\pi^2 z} \sqrt{4\pi^2(4\pi^2 - m)z - m(p^2 - mh^2)}}{\sqrt{4\pi^2 z + p^2 - mh^2}}.$$

Sous cette forme, on voit que la valeur générale de  $y$  fournie par l'intégration renferme des transcendentes elliptiques.

Mais on n'a que des fonctions algébriques et logarithmiques dans les trois cas particuliers suivants :

$$1^{\circ} \quad m = \frac{p^2}{h^2},$$

$$2^{\circ} \quad m = 4\pi^2,$$

$$3^{\circ} \quad m = \frac{2p\pi}{h}.$$

Dans le premier cas, l'équation différentielle devient

$$dy = \frac{\sqrt{4\pi^2 h^2 - p^2}}{4p\pi} \frac{\sqrt{p^2 + 4\pi^2 z}}{z} dz;$$

dans le second,

$$dy = \frac{\sqrt{4\pi^2 h^2 - p^2}}{4\pi z} \frac{\sqrt{4\pi^2 z + p^2}}{\sqrt{4\pi^2 z + p^2 - 4\pi^2 h^2}} dz;$$

dans le troisième,

$$dy = \frac{\sqrt{2\pi h - p}}{4\pi\sqrt{p}} \frac{4\pi^2 z + p^2}{z\sqrt{4\pi^2 z + p(p - 2\pi h)}} dz.$$

L'intégration s'effectue donc sans aucune difficulté; et, en faisant  $p = 2\pi h$  dans les intégrales, elles se réduisent à  $y + C = 0$ , c'est-à-dire à celle d'une droite perpendiculaire à l'axe. On retrouve ainsi la surface de la vis à filet carré.

### SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1880;

PAR M. J. GRIESS,

Maître répétiteur au lycée d'Alger (<sup>1</sup>).

*Étant donné un parabololoïde hyperbolique, on considère une génératrice rectiligne A de cette surface et la génératrice B du même système qui est perpendiculaire à la première; par les points a et b où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune passent deux génératrices rectilignes A' et B' de l'autre système; soient a' et b' les points où les deux droites A' et B' sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.*

*1° Trouver le lieu des points a et b, et celui des points a' et b', quand la droite A décrit le parabololoïde.*

*2° Trouver le lieu du point de rencontre des droites A et B' ou A' et B.*

*3° Calculer le rapport des longueurs a'b' et ab des*

(<sup>1</sup>) Classé le vingt-cinquième au concours d'admission.

*perpendiculaires communes, et étudier la variation de ces longueurs.*

Je prends l'équation du parabolôïde sous la forme

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

Une génératrice A aura pour équations

$$(A) \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\lambda}; \end{cases}$$

une génératrice B du même système sera

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda', \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\lambda'}. \end{cases}$$

Ces deux génératrices seront perpendiculaires si l'on a

$$(1) \quad \lambda\lambda' + p + q = 0.$$

Le point  $a$  où la perpendiculaire commune à ces deux génératrices rencontre A est défini par les équations (A) et par celle d'un plan mené par B perpendiculairement sur A. Un plan passant par B a pour équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \lambda' + k \left( \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\lambda'} \right) = 0$$

ou bien

$$- \frac{2k}{\lambda'} x + \frac{1+k}{\sqrt{p}} y + \frac{k-1}{\sqrt{q}} z - \lambda' = 0;$$

il sera perpendiculaire à A si

$$\frac{-2k}{\frac{\lambda'}{\sqrt{q}}} = \frac{\frac{k+1}{\sqrt{p}}}{\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}} = \frac{\frac{k-1}{\sqrt{q}}}{1},$$

ou bien

$$-\frac{2k}{\lambda\lambda'} = \frac{k+1}{p} = \frac{k-1}{q} = \frac{2k}{p+q} = \frac{2}{p-q},$$

d'où

$$k = \frac{p+q}{p-q}.$$

Le plan proposé a donc pour équation

$$2) \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \lambda' + \frac{p+q}{p-q} \left( \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\lambda'} \right) = 0.$$

En se servant des équations de A, celle-ci peut s'écrire

$$\lambda - \lambda' + \frac{p+q}{p-q} \left( \frac{2x}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda'} \right) = 0$$

ou bien

$$\lambda - \lambda' + 2x \frac{p+q}{p-q} \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = 0.$$

Divisant par  $\lambda - \lambda'$  et remplaçant  $\lambda\lambda'$  par  $-(p+q)$ , il vient pour l'équation du lieu

$$x + \frac{p-q}{2} = 0.$$

Cette équation, jointe à celle du paraboloïde, montre que le lieu des points  $a$  est une hyperbole dont le plan est perpendiculaire à l'axe du paraboloïde. On voit d'ailleurs que c'est aussi le lieu des points  $b$ , car tous les calculs sont symétriques en  $\lambda$  et  $\lambda'$ .

Je remarque que cette hyperbole est aussi le lieu des points du paraboloïde où les génératrices sont perpendi-

culaires. On aurait pu le prévoir. Si je mène en effet par B un plan perpendiculaire à A, ce plan coupera le plan tangent en  $a$  suivant une droite passant par  $a$ , perpendiculaire à A et rencontrant B. C'est donc une génératrice du paraboloïde. Donc, en  $a$ , les génératrices sont rectangulaires.

Cette remarque nous permet d'écrire immédiatement les équations des génératrices A' et B'.

Celles de A' sont

$$(A') \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\mu}, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \mu, \end{cases}$$

et A' sera perpendiculaire à A si  $\lambda\mu + p - q = 0$ .

De même celles de B' seront

$$(B') \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{2x}{\mu'}, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \mu', \end{cases}$$

avec la condition  $\lambda'\mu' + p - q = 0$ .

Pour trouver le point  $a'$ , je mènerai par B' un premier plan parallèle à A' : c'est évidemment le plan

$$(3) \quad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' = 0;$$

puis un second plan perpendiculaire à ce dernier.

Un pareil plan a une équation de la forme

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' + k \left( \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\mu'} \right) = 0,$$

ou bien

$$(4) \quad -\frac{2k}{\mu'} x + \frac{1+k}{\sqrt{p}} y + \frac{1-k}{\sqrt{q}} z - \mu' = 0;$$

il sera perpendiculaire au plan (3) si

$$\frac{1+k}{p} + \frac{1-k}{q} = 0$$

ou

$$k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = -\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right), \quad k = \frac{p+q}{p-q}.$$

Le plan (4) a donc pour équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' + \frac{p+q}{p-q} \left( \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \frac{2x}{\mu'} \right) = 0.$$

Le point  $a'$  se trouve à l'intersection de  $A'$  avec ce plan.  
Son équation s'écrit, en se servant de  $A'$ ,

$$\mu - \mu' + \frac{p+q}{p-q} 2x \frac{\mu' - \mu}{\mu\mu'} = 0,$$

ou, en divisant par  $\mu - \mu'$ ,

$$1 - \frac{p+q}{p-q} 2x \frac{1}{\mu\mu'} = 0.$$

Multiplions entre elles les deux conditions

$$\lambda\mu + p - q = 0, \quad \lambda'\mu' + p - q = 0;$$

il vient

$$\lambda\lambda' \cdot \mu\mu' = (p - q)^2.$$

Or

$$\lambda\lambda' = -(p + q);$$

donc

$$\mu\mu' = -\frac{(p - q)^2}{p + q},$$

et l'équation du lieu est

$$1 + 2x \frac{p+q}{p-q} \frac{(p+q)}{(p-q)^2} = 0,$$

$$x + \frac{(p-q)^3}{2(p+q)^2} = 0.$$

Cette équation, jointe à celle du paraboloïde, montre que ce lieu représente encore une hyperbole dont le plan est perpendiculaire à l'axe.

Cherchons maintenant le point de rencontre des droites A et B'. Pour cela prenons l'équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \mu',$$

avec la condition  $\lambda'\mu' + p - q = 0$ .

Les équations de A donnent

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda,$$

avec

$$\lambda\lambda' + p + q = 0,$$

d'où

$$\frac{\mu'}{\lambda} = + \frac{p - q}{p + q}$$

ou

$$\left( \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} \right) (p + q) = \left( \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} \right) (p - q),$$

ce qui s'écrit

$$2y \frac{q}{\sqrt{p}} = - 2z \frac{p}{\sqrt{q}} \quad \text{ou} \quad \frac{y}{p\sqrt{p}} + \frac{z}{q\sqrt{q}} = 0.$$

Ce plan coupe le paraboloïde suivant une parabole qui est le lieu.

On voit d'ailleurs qu'en opérant avec A' et B on obtiendrait le même lieu.

Pour calculer les longueurs  $ab$  et  $a'b'$ , il me suffira de prendre les plus courtes distances des projections des génératrices sur le plan des  $yz$ ; car les plans directeurs auxquels les génératrices sont parallèles sont perpendiculaires au plan des  $yz$ .

Pour avoir  $ab$ , je prendrai la distance du point ( $z = 0$ ,



$y = \lambda\sqrt{p}$ ) à la génératrice  $\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} - \lambda' = 0$ ; c'est

$$\frac{\lambda - \lambda'}{\sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}} = (\lambda - \lambda') \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p + q}}.$$

De même, pour avoir  $a'b'$ , je prends la distance du point ( $z = 0, y = \mu\sqrt{p}$ ) à la droite  $\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} - \mu' = 0$ , ce qui donne

$$\frac{(\mu - \mu')\sqrt{pq}}{\sqrt{p + q}}.$$

Le rapport est donc

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{\lambda - \lambda'}{\mu - \mu'}.$$

Or

$$\mu = -\frac{p - q}{\lambda}, \quad \mu' = -\frac{p - q}{\lambda'},$$

$$\mu - \mu' = -(p - q) \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right),$$

$$\mu - \mu' = -(p - q) \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = -(p - q) \frac{\lambda - \lambda'}{p + q}.$$

Donc le rapport  $\frac{ab}{a'b'}$  est, en valeur absolue,

$$\frac{p + q}{p - q};$$

il est donc constant quand la génératrice **A** se déplace sur le parabolôide.

Comme l'on voit, la variation de ces longueurs ne dépend que de  $\lambda - \lambda'$ . Or

$$\lambda' = -\frac{p + q}{\lambda};$$

donc

$$\lambda - \lambda' = \lambda + \frac{p+q}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + p + q}{\lambda}.$$

Pour étudier la variation de cette quantité, prenons la dérivée; c'est

$$2\lambda^2 - \lambda^2 - p - q \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - (p + q).$$

Pour  $\lambda = \sqrt{p+q}$ , la dérivée est nulle; de plus, elle change de signe en passant du négatif au positif, quand  $\lambda$  passe par cette valeur en variant de 0 à  $+\infty$ ; donc la fonction passe par un minimum.

Pour cette valeur de  $\lambda$ , celle de la première longueur est

$$ab = \frac{pq}{p+q} (\lambda - \lambda') = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p+q}} 2\sqrt{p+q} = 2\sqrt{pq}$$

et

$$a'b' = 2\sqrt{pq} \frac{p-q}{p+q}.$$

*Note.* — La même question a été résolue par M. A. Leinekugel.

## SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR LE CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880;

PAR M. H. LEZ.

*Soient M et N les points où l'axe des x rencontre le cercle  $x^2 + y^2 = r^2$ ; considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points M et N; menons, par un point Q pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole.*

*Soient A et B les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact. Démontrer que, des deux droites QA et QB, l'une est parallèle à une direc-*

tion fixe et l'autre passe par un point fixe P. Le point P étant donné, l'hyperbole correspondante qui passe par les points M et N est déterminée; on construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets. Si le point P décrit la droite  $y = x$ , quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole? On déterminera son équation et on le construira.

Pour qu'une hyperbole équilatère

$$(1) \quad x^2 + 2hxy - y^2 + 2gy + 2fx + l = 0$$

passe par les points M, N, il faut que le trinôme  $x^2 + 2fx + l = 0$  soit vérifié par  $x = \pm r$ , c'est-à-dire que le terme en  $x$  soit nul; alors  $l = -r^2$ , et l'équation (1) devient

$$(2) \quad x^2 + 2hxy - y^2 + 2gy - r^2 = 0.$$

Mais la polaire d'un point  $Q(\mu, \nu)$ , par rapport à cette conique, est représentée par

$$(\mu + h\nu)x + (h\mu - \nu + g)y + g\nu - r^2 = 0;$$

si le point Q est sur le cercle

$$(3) \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

on a

$$\mu = r \cos \alpha, \quad \nu = r \sin \alpha,$$

et, pour l'équation de la polaire,

$$r(\cos \alpha + h \sin \alpha)x + (hr \cos \alpha - r \sin \alpha + g)y + r(g \sin \alpha - r) = 0.$$

Or cette droite rencontrant le cercle (3) en deux points  $\Rightarrow$

$$(A) \quad x = r \cos \alpha, \quad y = -r \sin \alpha,$$

$$(B) \quad \begin{cases} x = \frac{r \cos \alpha (r^2 - r^2 h^2 - g^2) + 2hr^2(r \sin \alpha - g)}{r^2 + r^2 h^2 + g^2 + 2gr(h \cos \alpha - \sin \alpha)}, \\ y = \frac{r \sin \alpha (r^2 h^2 - r^2 - g^2) + 2r^2(rh \cos \alpha + g)}{r^2 + r^2 h^2 + g^2 + 2gr(h \cos \alpha - \sin \alpha)}, \end{cases}$$

on trouve, pour l'équation de QA,

$$x = r \cos \alpha,$$

et, pour celle de QB,

$$(hr + g \cos \alpha) y + (r - g \sin \alpha) x - (h \sin \alpha + \cos \alpha) r^2 = 0.$$

La première droite est donc perpendiculaire à MN et la seconde passe par un point fixe P  $\left(x = -\frac{r^2 h}{g}, y = \frac{r^2}{g}\right)$ ; car son équation peut facilement se mettre sous la forme

$$\left(y - \frac{r^2}{g}\right)(hr + g \cos \alpha) = \left(x + \frac{r^2 h}{g}\right)(g \sin \alpha - r).$$

Ce point P est le pôle de MN par rapport à l'hyperbole équilatère (2). Lorsqu'il est donné, l'équation (2) ne contient plus de coefficients variables; car on écrira

$$(4) \quad x^2 - \frac{2d}{c} xy - y^2 + \frac{2r^2}{c} y - r^2 = 0,$$

en faisant

$$d = -\frac{r^2 h}{g}, \quad \frac{r^2}{g} = c.$$

L'hyperbole équilatère est donc bien déterminée. Les dérivées  $dx + cy = r^2$ ,  $cx - dy = 0$  montrent que son centre est à la rencontre de la polaire du point P, par rapport au cercle (3), avec une droite passant par l'origine O et le même point P. Quant aux axes, leurs coefficients angulaires étant donnés par l'équation

$$du^2 - 2cu - d = 0,$$

de laquelle on tire

$$u = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + d^2}}{d} = \frac{c \pm \gamma}{d},$$

ils sont faciles à tracer; d'ailleurs, ils sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les droites  $y = 0$ ,  $dx + cy = r^2$ .

Connaissant la direction des axes, on a celle des asymptotes.

Or, les asymptotes et un point quelconque  $M$  ou étant donnés, on peut déterminer la longueur des axes et par suite les sommets.

En décrivant une circonférence sur le diamètre  $HM$  perpendiculaire à l'axe transverse, on a, en effet,

$$\overline{IM}^2 = MH.MK = a^2 = b^2.$$

Enfin, si le point  $P$  doit suivre la droite  $y = x$ , il faut que  $d = c$ ; alors l'équation (4) devient

$$x^2 - 2xy - y^2 + \frac{2r^2}{c}y - r^2 = 0.$$

En l'identifiant avec l'équation générale aux foyers

$$(1 - m^2)x^2 - 2mnxy^2 + (1 - n^2)y - 2(\alpha + mp)x - 2(\beta + np)y + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0$$

on a les égalités

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{1}{1 - m^2} = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{mn} = -\frac{0}{2(\alpha + mp)} \\ \quad \quad \quad = -\frac{r^2}{c(\beta + np)} = -\frac{r^2}{\alpha^2 + \beta^2 - p^2}, \end{cases}$$

d'où

$$p = -\frac{\alpha}{m} \quad \text{et} \quad -r^2 mn = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\alpha^2}{m^2}.$$

Cette dernière relation entre les coordonnées  $\alpha$  et  $\beta$  des foyers permet d'avoir de suite le lieu demandé, car par les égalités (5) on tire encore

$$m^2 = \frac{\sqrt{2} \pm 1}{\sqrt{2}}, \quad n^2 = \frac{\sqrt{2} \mp 1}{\sqrt{2}}, \quad mn = \mp \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui fournit deux équations différentes :

1° Celle d'une ellipse

$$(6) \quad r^2(\sqrt{2} + 1) = x^2\sqrt{2} + \beta^2(2 + \sqrt{2});$$

2° Celle d'une hyperbole

$$(7) \quad r^2(\sqrt{2} - 1) = x^2\sqrt{2} - \beta^2(2 - \sqrt{2}).$$

Ces deux coniques passent par les sommets d'un carré, ont leur centre à l'origine et leurs foyers en M, N; elles sont donc homofocales. Quand  $2c^2 > r^2$ , le point P est à l'extérieur du cercle (3), les foyers des hyperboles équilatères décrivent l'ellipse (6); par contre, ils décrivent l'hyperbole (7) si  $2c^2 < r^2$ .

*Note.* — Solution analytique de M. Albert Isay, élève du lycée de Nancy.

M. J.-B. Pomey a envoyé une excellente solution géométrique. Nous en avons d'ailleurs déjà publié une dans le Tome précédent.

## SUR L'ÉQUATION DE HESSE AUX POINTS D'INFLEXION;

PAR M. CRETIN,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

En vertu des identités d'Euler sur les fonctions homogènes, si deux fonctions ont des dérivées secondes respectivement égales, pour un système de valeurs des variables, les fonctions elles-mêmes et leurs premières dérivées sont respectivement égales à un facteur numérique près.

Soit  $f(x, y) = 0$  l'équation d'une courbe algébrique; l'équation qui détermine les points d'inflexion ne renferme que les dérivées premières et secondes de la fonction  $f$ .

Considérons sur la courbe un point de coordonnées  $x$  et  $y$ , les dérivées secondes de la fonction  $f$  (rendue ho-

mogène) pour le point considéré, et la conique dont l'équation est

$$X^2 f''_{xx} + 2XY f''_{xy} + Y^2 f''_{yy} + 2X f''_{xz} + 2Y f''_{yz} + f''_{zz} = 0.$$

Les coefficients sont précisément les dérivées secondes du premier membre, au facteur 2 près. Donc la conique passe par le point considéré, et, pour ce point, les dérivées premières et secondes du premier membre de l'équation de la conique sont égales, à un facteur constant près, aux mêmes quantités relatives à la première courbe. Donc le point  $(x, y)$  sera simultanément un point d'inflexion sur la courbe et sur la conique. Or, la condition pour que le point soit d'inflexion sur la conique est qu'elle se réduise à deux droites. C'est donc que l'on ait

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} = 0.$$

## SUR LE THÉORÈME DE ROLLE ;

PAR M. J. COLLIN.

Dans le cas où il s'agit d'équations algébriques, le théorème de Rolle peut se démontrer de la manière suivante.

Soient  $f(x) = 0$  l'équation considérée;  $a, b, c, \dots, l$  ses racines réelles,  $a$  et  $b$  étant deux racines consécutives;  $\varphi(x)$  le polynôme relatif aux racines imaginaires et  $\psi(x)$  le quotient de  $f(x)$  par  $x - a$ , de sorte que

$$f(x) = (x - a)(x - b) \dots (x - l) \varphi(x) = (x - a) \psi(x).$$

D'après un théorème bien connu, on a

$$f'(a) = \psi(a);$$

donc

$$f'(a) = (a - b)(a - c) \dots (a - l) \varphi(a),$$

et de même

$$f'(b) = (b - a)(b - c) \dots (b - l) \varphi(b).$$

Or,  $\varphi(a)$  et  $\varphi(b)$  sont de même signe; tous les autres facteurs de  $f'(a)$  et  $f'(b)$  sont aussi de même signe, à l'exception de  $(a - b)$  et  $(b - a)$ , qui sont de signes contraires. Donc  $f'(a)$  et  $f'(b)$  sont de signes contraires; donc l'équation  $f'(x) = 0$  admet un nombre impair de racines comprises entre  $a$  et  $b$ .

Le théorème de Rolle n'est ainsi qu'un corollaire immédiat du théorème des substitutions.

## NORMALE MENÉE A UNE CONIQUE A CENTRE D'UN POINT DE L'AXE FOCAL;

PAR M. ERNEST LEBON.

**PROBLÈME.** — *Si par un point o de l'axe focal d'une conique à centre c on mène à la courbe les deux normales égales og et oh et une perpendiculaire ok à un diamètre pq, le lieu du point d'intersection r de cette perpendiculaire et du diamètre ij conjugué au précédent est la droite gh qui passe par les pieds des deux normales.*

Prenons les axes de la conique pour axes coordonnés. On a, en désignant par  $d$  la distance  $co$ , les équations suivantes de  $pq$ ,  $ij$  et  $ok$  :

$$y = mx, \quad y = -\frac{b^2 x}{a^2 m}, \quad y = -\frac{1}{m} (x - d).$$



En portant les valeurs des coordonnées du point  $o$  dans l'équation de la normale en  $h$ , on trouve que l'équation de  $hg$  est

$$x = -\frac{a^2 d}{c^2}.$$

L'abscisse du point  $r$  ayant aussi cette valeur, la propriété énoncée est vraie.

*Applications.* — 1° Pour mener d'un point  $c$  de l'axe focal les normales égales à une conique à centre, on construit les deux diamètres conjugués égaux, et l'on détermine le point d'intersection  $r$  d'un diamètre et de la perpendiculaire à l'autre.

2° Cette propriété permet de vérifier, ou mieux de simplifier, les constructions relatives aux parallèles limites, minima et double qu'il faut trouver dans l'épure du problème suivant : *Construire les projections de la surface de révolution à axe vertical engendrée par une conique à centre dont l'axe focal coupe l'axe de révolution.*

## CONCOURS GÉNÉRAL DE 1880.

### *Mathématiques spéciales.*

Sur une courbe donnée du troisième degré, ayant un point de rebroussement  $O$ , on considère une suite de points  $A_{-n}, A_{-(n-1)}, \dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ , tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe au point suivant :

- 1° Étant données les coordonnées du point  $A_0$ , on propose de trouver les coordonnées des points  $A_{-n}, A_n$ , et déterminer les limites vers lesquelles tendent ces points quand l'indice  $n$  augmente indéfiniment.

2° On demande le lieu décrit par le premier point limite lorsque la courbe du troisième degré se déforme en conservant le même point de rebroussement O, la même tangente en ce point, et en passant constamment par trois points fixes P, Q, R.

3° On étudiera comment varient les points d'intersection de ce lieu et des côtés du triangle PQR, quand les sommets de ce triangle se déplacent sur des droites passant par le point O.

### *Philosophie.*

La Terre étant supposée sphérique, on considère le point M de la surface dont la latitude est égale à la longitude :

1° Déterminer le lieu des projections des points M sur le plan de l'équateur;

2° Déterminer le lieu des droites AM, A étant le point de l'équateur à partir duquel on compte les longitudes.

### *Mathématiques élémentaires.*

I. Résoudre le système de  $n$  équations à  $n$  inconnues :

$$\begin{aligned} x_1(x_2 + x_3 + \dots + x_n) + 1.2 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &= 9 a^2, \\ x_2(x_1 + x_3 + \dots + x_n) + 2.3 (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &= 25 a^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + n(n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &= (2n+1)^2 a^2. \end{aligned}$$

II. D'un point O pris dans le plan d'un cercle partent quatre droites qui coupent sa circonférence, la première aux points  $a$  et  $a'$ , la deuxième aux points  $b$  et  $b'$ ; la troisième aux points  $c$  et  $c'$ ; et la quatrième aux points  $d$  et  $d'$ .

Prouver que les sinus des moitiés des arcs  $ac$ ,  $bd$ ,  $ad$ ,  $bc$ ,  $a'c'$ ,  $b'd'$ ,  $a'd'$ ,  $b'c'$  sont liés entre eux par la

relation

$$\frac{\sin \frac{ac}{2} \sin \frac{bd}{2} \sin \frac{a'd'}{2} \sin \frac{b'c'}{2}}{\sin \frac{cb}{2} \sin \frac{da}{2} \sin \frac{d'b'}{2} \sin \frac{a'c'}{2}} = 1.$$

### *Rhétorique.*

I. Aux deux extrémités A et B du diamètre AB d'un demi-cercle, on lui mène deux tangentes; on construit ensuite une troisième tangente, qui coupe les deux premières aux points C et D. On demande de déterminer cette tangente de manière que le volume engendré par le trapèze ABDC en tournant autour du diamètre AB et la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle autour de son diamètre soient entre eux dans le rapport de  $m$  à 1. Discussion.

II. Révolution sidérale et révolution synodique de la Lune. Orbite décrite par la Lune autour de la Terre.

### *Seconde.*

Sur le côté BC d'un triangle ABC ou sur son prolongement, on prend un point arbitraire D. On fait passer deux circonférences, l'une par les points A, B et D, l'autre par les points A, C et D; soient O et O' les centres de ces deux circonférences. On propose :

1° De démontrer que le rapport des rayons de ces deux circonférences est indépendant de la position du point D sur le côté BC;

2° De déterminer la position que doit occuper le point D pour que les deux rayons aient la plus petite longueur possible;

3° De démontrer que le triangle AOO' est semblable au triangle ABC;

4° De trouver le lieu décrit par le point  $M$  qui partage la droite  $OO'$  dans le rapport de deux longueurs données  $m$  et  $n$ ; on examinera le cas particulier où le point  $M$  est le pied de la perpendiculaire abaissée du point  $A$  sur  $OO'$ .

### *Troisième.*

I. Par les deux extrémités d'une droite  $AB$ , et d'un même côté de cette droite, on lui élève deux perpendiculaires  $AC$  et  $BD$ , telles que l'aire du trapèze  $ABCD$  ait une valeur constante donnée. Du milieu  $E$  de la droite  $AB$  on abaisse une perpendiculaire  $EM$  sur la droite  $CD$ . Trouver le lieu décrit par le pied  $M$  de cette perpendiculaire, quand on fait varier les longueurs des perpendiculaires  $AC$  et  $BD$ .

Même problème quand les lignes  $AC$  et  $BD$ , au lieu d'être perpendiculaires à  $AB$ , sont parallèles à une droite fixe donnée.

II. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les deux diagonales, l'angle qu'elles forment entre elles, et le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère.  
Discussion.

## NÉCROLOGIE.

M. Giusto Bellavitis est mort à Tezze, près de Bassano, le 6 novembre 1880. Son nom est bien connu des lecteurs des *Nouvelles Annales*, et tous comprendront que c'est une grande perte que viennent de faire les sciences mathématiques, en Italie.

Né le 22 novembre 1803, à Bassano, il fit par lui-même ses études; la tournure de son esprit le porta sur-

tout vers les sciences mathématiques. En 1840, il fut admis à l'Institut vénitien; nommé professeur au Lycée de Vicence en 1842, puis à l'Université de Padoue en 1845, il y a constamment, depuis lors, enseigné les Mathématiques, et il y avait acquis une grande renommée. Il était en outre sénateur du royaume italien et conseiller municipal de Padoue.

Les premiers travaux qu'il ait publiés remontent à 1826; à partir de cette époque, il n'a cessé de produire un nombre considérable de Mémoires se rapportant le plus souvent aux sciences, mais sans négliger, pour ainsi dire, aucune branche des connaissances humaines. Il publiait aussi, sous le titre de *Rivista di Giornali*, à des époques irrégulières, un Recueil scientifique des plus intéressants.

Mais son principal titre de gloire est l'invention de la méthode des équipollences, dont il conçut la première idée dès l'année 1832, et à laquelle il a donné ensuite de grands développements. Ce calcul géométrique nouveau commence à être connu et apprécié aujourd'hui, après être longtemps resté dans l'indifférence et l'oubli.

L'écrit dans lequel Bellavitis a publié l'exposé le plus complet de sa méthode, *Exposition de la méthode des équipollences* (1854), a été traduit en français par M. Laisant et inséré tout d'abord dans les *Nouvelles Annales*. Cette traduction a paru ensuite, en 1874, en un Volume édité par M. Gauthier-Villars. La même année, M. Zahradnick en publiait une traduction en langue bohême.

Ces faits montrent que la méthode des équipollences se répandait en Europe au cours des dernières années de l'inventeur. Tout fait croire qu'elle sera de plus en plus appliquée désormais; il est bien probable même, et c'est en même temps désirable, qu'elle finira par pénétrer dans l'enseignement.

Les qualités dominantes de Bellavitis étaient un esprit d'invention très curieux et très droit, et, par-dessus tout, une préoccupation minutieuse de la clarté et du bon sens. Nous savons que ses leçons étaient considérées comme tout à fait remarquables, et cela est loin de nous étonner, car on sent, rien que par ses écrits, combien il avait souci de faire passer dans l'esprit du lecteur, sans difficulté, sans obscurité, ce qu'il avait nettement conçu dans le sien.

Il faut ajouter que l'homme fut à la hauteur du savant. Très fin, très bienveillant et très juste, il était aimé autant qu'admiré de ses élèves, et il laisse des regrets universels, d'autant plus vifs que sa mort était plus imprévue.

Il y pensait pourtant, et il avait fait préparer depuis quelques années des Lettres imprimées ainsi conçues : « *Hier a cessé de vivre le professeur comte Giusto Bellavitis, sénateur du royaume. Padoue, le . . . . .* »  
 Détail touchant : les adresses de ces Lettres, destinées à tous les amis avec lesquels il était en correspondance habituelle, avaient été écrites de sa propre main ; il ne voulait pas qu'ils apprissent par d'autres que lui-même la douloureuse nouvelle.

Bellavitis laisse derrière lui une veuve et un fils, qui l'adoraient autant qu'il les adorait lui-même. Puissent les sympathies et les regrets qu'inspire la mémoire de celui qu'ils ont perdu adoucir un peu leur douleur !

UN ABONNÉ.

## CORRESPONDANCE.

Le numéro de décembre 1880 des *Nouvelles Annales de Mathématiques* renferme une très intéressante Di-

*gression historique sur les quantités négatives.* On y voit (p. 563) que le mot *Algèbre* vient de l'arabe. Je voudrais vous faire une simple observation orthographique sur la transcription *dchebr* du mot arabe.

Ce mot<sup>(1)</sup> est composé de trois lettres, dont la première (le *djim*) représentait, originairement, l'articulation de notre *g* devant *a*, *o*, *u*; mais cette lettre s'est adoucie par la suite et a pris la valeur du *g* italien, c'est-à-dire celle de *dj* français, qu'elle a partout aujourd'hui, à l'exception de quelques contrées orientales, notamment l'Égypte, où elle a conservé sa valeur archaïque. C'est avec la valeur de *dj* que le *djim* arabe s'est introduit dans les alphabets persan, turk et hindoustani.

Les Allemands, ne connaissant pas l'articulation douce de notre *j*, transcrivent le *djim* des noms orientaux d'une façon fort barbare par *dsch*; ils écrivent donc *al dschebr* au lieu de *al djibr*, et c'est en copiant les Allemands que des Français écrivent *al dchebr*, fort à tort puisque nous pouvons rendre *exactement* le mot arabe. Les Anglais écrivent tout naturellement *al jebr*, leur *j* ayant exactement la valeur de la lettre arabe (*dj*). Il y a donc une singulière méprise dans cette phrase : « Le nom *al dchebr*, et plus tard *al jebr*.... » *Dchebr* est une orthographe tudesque, et *jebr* l'orthographe anglaise d'un seul et même mot arabe qui n'a jamais varié et que nous devons transcrire par *djibr*.

G<sup>al</sup> PARMENTIER.

*Extrait d'une lettre de M. D. Marchand,  
curé de Pontoise.*

J'avais trouvé depuis longtemps une formule permettant de calculer la somme des cinquièmes puissances

---

جبر, dont la première lettre à droite ج équivaut à *dj*.

des  $n$  premiers nombres entiers. La voici :

$$\Sigma n^5 = n^3 \left[ \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)(n)^2(n+1)}{12} \right].$$

Aujourd'hui même, après avoir lu les développements donnés (2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 459), j'ai voulu savoir, malgré mon ignorance de l'Algèbre, si je ne pourrais pas découvrir une autre formule.

Faisant application de ma méthode de décomposition des éléments contenus dans un quotient, je suis arrivé rapidement au résultat suivant :

$$\Sigma n^5 = \frac{n(n+1)}{2} \left[ \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{2(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{24} \right].$$

Voici, du reste, comment j'ai raisonné :

1<sup>o</sup> On sait que la somme de deux nombres à la première puissance divise exactement la somme de ces mêmes nombres dans les puissances impaires, la troisième, la cinquième, la septième, etc.

2<sup>o</sup> On sait également qu'à la cinquième puissance, comme à la neuvième, la treizième, la dix-septième, etc., les *désinences* des nombres sont les mêmes qu'à la première puissance.

3<sup>o</sup> On sait encore que les nombres triangulaires, en dernière analyse, se forment par l'addition successive des nombres.

M'appuyant sur ces principes, j'ai tiré rigoureusement les conclusions suivantes :

1<sup>o</sup>  $n$  divise exactement  $\Sigma n^5$ .

2<sup>o</sup>  $\frac{n(n+1)}{2}$  divise exactement  $\Sigma n^5$ , puisque les *désinences* de la cinquième puissance sont les mêmes que celles de la première puissance.

3<sup>o</sup> La division de  $\Sigma n^5$  par  $\frac{n(n+1)}{2}$  étant effectuée, il



n'y a plus qu'  
quotient.

4° Or, les é  
suivants :

1° Le carré

2° Deux foi  
à-dire

1°

2°

ce qui donne

$$\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

*Note relat*  
page 57 de ce  
vant :

*Lorsqu'un*  
*inscrit et circ*  
*reste proporti*  
*sommets les*  
*avec la circon*

D'autre pa  
vante, qui po

*Lorsqu'un*  
*et circonscrit*  
*moyennes dis*  
*la ligne des c*  
*la surface du*  
*de ses angles,*  
*cercle inscrit*  
*signe contraire.*

## QUESTIONS.

---

1359. ABC étant un triangle donné, on le coupe par une transversale qui détermine sur ses côtés ou leurs prolongements six segments, tels que le produit de trois d'entre eux non consécutifs soit constant : trouver l'enveloppe de la transversale. (BARBARIN.)

1360. Trouver les trajectoires orthogonales d'une droite de longueur constante mobile entre deux axes rectangulaires. (BARBARIN.)

1361. Faire voir que l'étude des variations de la fonction  $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$  peut toujours être ramenée à l'étude des variations de la fonction  $\frac{Ax^2 + Bx + C}{x^2 + px + q}$ , dans laquelle les racines  $\alpha, \beta$  de  $x^2 + px + q = 0$  sont *réelles* et *inégaes* ; que, si  $R(x)$  est le reste de la division de  $Ax^2 + Bx + C$  par  $x^2 + px + q$ , il y aura un maximum et un minimum si  $\frac{R(\alpha)}{R(\beta)} > 0$ , il n'y aura ni maximum ni minimum si  $\frac{R(\alpha)}{R(\beta)} < 0$ , il n'y aura qu'un *maximum* (pour la fonction transformée), si  $R(x)$  est constant.

Trouver, en fonction de  $\alpha, \beta, R(\alpha), R(\beta)$ , les valeurs de  $x$  qui font passer la fonction proposée par un maximum ou un minimum ?

Dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  se présenteraient sous la forme  $\frac{a \pm \sqrt{b}}{c}$ , peut-on simplifier les calculs ?

(HÉNET, répétiteur à Bordeaux.)

---

# NOUVELLE MÉTHODE D'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. A. PICART.

1. Soit  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ( $a^2 > b^2 > c^2$ ) l'équation de l'ellipsoïde. L'équation différentielle des lignes de courbure de cette surface est, en posant, pour abréger,

$$\frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)} = A, \quad \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2} = B,$$

$$(1) \quad Axy \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B) \frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

2. Cette équation a été intégrée pour la première fois par Monge. Le procédé suivi par cet illustre géomètre consiste à différentier cette équation pour éliminer les constantes A et B. Cette élimination de deux constantes exige généralement deux différentiations successives; mais, dans ce cas particulier, une seule différentiation permet d'éliminer à la fois A et B, et l'on obtient l'équation du second ordre

$$(2) \quad xy \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} - y \right) = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{y}{x} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = 0.$$

Le premier membre est la dérivée de  $\frac{y}{x} \frac{dy}{dx}$ ; on a donc,

par une première intégration,

$$(3) \quad \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = C.$$

Une seconde intégration donne immédiatement

$$(4) \quad y^2 = Cx^2 + C'.$$

Reste à déterminer une relation entre les constantes  $C$  et  $C'$ , par la condition que la valeur de  $y$  de (4) satisfasse identiquement à l'équation (1).

3. Ce procédé d'intégration s'applique à un grand nombre d'équations, et les calculs qu'il exige sont généralement simples. Mais il faut reconnaître qu'il est un peu détourné et que, faisant dépendre l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre de celle d'une équation d'ordre supérieur, il semble prendre des choses à rebours de la marche naturelle.

Ne pourrait-on intégrer directement l'équation sans passer par la différentiation? C'est ce que nous nous proposons d'examiner.

4. Résolvons l'équation (1) par rapport à  $\frac{dy}{dx}$ ; il vient

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(x^2 - Ay^2 - B) + \sqrt{x^4 + 2Ax^2y^2 + A^2y^4 - 2Bx^2 + 2ABy^2}}{2Axy}$$

ou

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2Axy \, dy \\ + (x^2 - Ay^2 - B + \sqrt{x^4 + 2Ax^2y^2 + A^2y^4 - 2Bx^2 + 2ABy^2}) \, dx \end{array} \right.$$

Multiplions cette dernière équation par  $x$  et posons

$$x^2 = u, \quad y^2 = v,$$

d'où

$$2x \, dx = du, \quad 2y \, dy = dv;$$

nous obtenons ainsi

$2A u dv$

$$+ (u - A v - B + \sqrt{u^2 + 2A u v + A^2 v^2 - 2B u + 2AB v + B^2}) du = 0.$$

Remarquons que, dans cette équation différentielle, les quantités  $u$  et  $v$ , égales respectivement à  $x^2$  et  $y^2$ , doivent être regardées comme essentiellement positives.

On reconnaît aisément que les coefficients de  $du$  et de  $dv$  conservent le même signe pour toute valeur positive de  $u$  et  $v$ . La chose est évidente pour le coefficient de  $dv$ ; quant au coefficient de  $du$ , si on l'égalé à 0, on obtient, en chassant le radical,

$$4A u v = 0,$$

d'où l'on voit que le coefficient ne s'annule que pour  $u = 0$  et  $v = 0$ ; il conserve donc le même signe pour toute valeur positive de  $u$ .

Il résulte de là que le coefficient différentiel  $\frac{dv}{du}$  ou son inverse  $\frac{du}{dv}$  garde constamment le même signe. La quantité  $v$ , considérée comme fonction de  $u$ , est donc constamment croissante ou décroissante; il en est de même de la quantité  $u$  considérée comme fonction de  $v$ . En d'autres termes, si l'on regarde  $u$  et  $v$  comme les coordonnées d'un point dans un plan, le système de lignes que représente l'équation (6) est tel que chacune de ces lignes n'est coupée qu'en un point par une parallèle à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.

Cela nous conduit à examiner si l'intégrale de l'équation (6) ne serait pas linéaire en  $u$  et  $v$ , de la forme

$$v = hu + k.$$

Si l'on pose

$$7) \quad z = u - A v - B + \sqrt{u^2 + 2A u v + A^2 v^2 - 2B u + 2AB v + B^2}$$



droites sur le plan des  $uz$ . Faisons  $z = \frac{u}{m}$  dans l'équation (9); nous obtenons, en divisant par  $u$ , l'équation

$$(10) \quad u - 2m(u - A v - B) - 4m^2 A v = 0,$$

qui représente un système de droites dont le coefficient angulaire est

$$- \frac{1 - 2m}{2mA(1 - 2m)} \quad \text{ou} \quad - \frac{1}{2mA}.$$

Le produit de ce coefficient angulaire par  $m$  est bien égal à  $-\frac{1}{2A}$ .

Donc l'équation (10), où entre une constante arbitraire  $m$ , est l'intégrale générale de l'équation différentielle (6).

En remplaçant dans cette équation  $u$  et  $v$  par  $x^2$  et  $y^2$  et  $2m$  par  $k$ , on obtient, pour la projection des lignes de courbure de l'ellipsoïde sur le plan des  $xy$ , l'équation suivante

$$A y^2 + \frac{x^2}{k} = \frac{B}{k - 1},$$

ou

$$\frac{\frac{x^2}{Bk}}{\frac{k - 1}{A(k - 1)}} + \frac{\frac{y^2}{B}}{A(k - 1)} = 1,$$

qui représente des ellipses réelles pour les valeurs de  $k$  supérieures à 1, des ellipses imaginaires pour  $k$  positif et plus petit que 1, et des hyperboles pour  $k$  négatif. Le grand axe des ellipses et l'axe transverse des hyperboles sont dirigés suivant l'axe des  $x$ .

---

On a les solutions évidentes  $u = 0, u = 1$ .

Faisant  $h = 1$ , on a :

1°

$$V = v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

on trouve

$$m = 1, \quad v = -1, \quad u = 0,$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad v = -4, \quad u = -3.$$

2°

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = -1, \quad v = -1, \quad u = 0,$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad v = -\frac{4}{3}, \quad u = -\frac{1}{3},$$

solutions équivalentes aux précédentes.

3°

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = \frac{3}{2}, \quad n = \frac{7}{8}, \quad v = \frac{3}{8}, \quad u = \frac{11}{8}.$$

4°

$$v^4 + 3v^3 + 4v^2 + 2v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2,$$

$$n = 1, \quad m = \frac{3}{2}, \quad v = 0, \quad u = 1.$$

Faisons maintenant  $h = -3$ , d'où  $k = 11$ :

$$V = v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121.$$

1°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv + 11)^2;$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad v = 4, \quad u = 1,$$

$$m = -\frac{71}{11}, \quad v = \frac{41}{11}, \quad u = \frac{8}{11}.$$



2°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv - 11)^2,$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad v = \frac{228}{35}, \quad u = \frac{123}{35},$$

$$m = \frac{71}{11}, \quad v = \frac{1073}{627}, \quad u = -\frac{808}{627}.$$

3°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (v^2 + mv + n)^2,$$

$$m = -\frac{13}{2}, \quad n = -\frac{71}{11}, \quad v = \frac{35}{8}, \quad u = \frac{11}{8}.$$

4°

$$v^4 - 13v^3 + 64v^2 - 142v + 121 = (mv^2 + nv + 11)^2,$$

$$n = -\frac{71}{11}, \quad m = \frac{2703}{2 \times 11^3}, \quad v = \frac{763752}{219965}, \quad u = \frac{103857}{219965}.$$

On a ainsi les solutions

$$\begin{aligned} (0, 1, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (3, -1, 11), \quad (8, 11, 101), \\ (123, 35, 13361), \quad (808, -627, 1169341), \\ (103857, 219965, 40176822841). \end{aligned}$$

Ces solutions en feront trouver d'autres indéfiniment, sans autre difficulté que la longueur des calculs, à mesure que les nombres augmentent.

Ce premier calcul donne toutes les solutions simples indiquées par M. Lucas.

## 2. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^4 - 5x^2y^2 + 5y^4 = z^2.$$

Il suffit, comme plus haut, de trouver les solutions en nombres premiers entre eux. On a la solution évidente

$$y = 0, \quad x = 1.$$

Divisant par  $y^4$  et posant  $\frac{x}{y} = u$ , l'équation peut s'écrire

$$u^4 - 5u^2 + 5 = \frac{z^2}{y^4} = t^2.$$

On aperçoit immédiatement la solution  $u = 1$ ,  $t = 1$ .

Posons  $u = v + h$ ; il vient

$$v^4 + 4hv^3 + (6h^2 - 5)v^2 + (4h^3 - 10h)v + 1 = t^2.$$

Faisons  $h = 1$ :

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = t^2.$$

1° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

$$m = 2 \quad \text{donne} \quad v = -2, \quad u = -1,$$

solution évidente *a priori*;

$$m = -3 \quad \text{donne} \quad v = 1, \quad u = 2.$$

2° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 2 \quad \text{donne} \quad v = -2, \quad u = -1,$$

$$m = 3 \quad \text{»} \quad v = -3, \quad u = -2.$$

3° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = 2, \quad n = 1, \quad v = -2, \quad u = -1.$$

4° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2;$$

$$n = -3, \quad m = -4, \quad v = -\frac{4}{3}, \quad u = -\frac{1}{3}.$$

Comme le signe de  $u$  est arbitraire, on a les solutions

$$u = 1, 2, \frac{1}{3},$$

ce qui donne pour l'équation proposée les solutions

$$(1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1), (11, 3, 19).$$

Faisons maintenant  $h = 2$ .

1°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 4, \quad v = -\frac{1}{4}, \quad u = -2.$$

$$m = 6, \quad v = -\frac{19}{4}, \quad u = -\frac{11}{4}, \quad z = 79.$$

2°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 4, \quad v = -\frac{1}{4}, \quad u = -2.$$

$$m = -6, \quad v = \frac{3}{4}, \quad u = \frac{11}{4}.$$

3°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv - n)^2;$$

$$m = 4, \quad n = \frac{3}{2}, \quad 12v + 1 = 12v + \frac{n}{4},$$

$$v = \infty, \quad u = \infty, \quad y = 0.$$

4°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (mv^2 + nv - 1)^2;$$

$$n = 6, \quad m = -\frac{17}{2}, \quad v = \frac{88}{57}, \quad u = \frac{202}{57}, \quad z = 32479.$$

On a les nouvelles solutions

$$(11, 4, 79), (202, 57, 32479).$$

3. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers et tels que le carré de l'hypoténuse, augmente ou diminué du double de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.*

Les côtés et l'aire d'un triangle rectangle en nombres

Divisant par  $y^4$  et posant  $\frac{x}{y} = u$ , l'équation peut s'écrire

$$u^4 - 5u^2 + 5 = \frac{z^2}{y^4} = t^2.$$

On aperçoit immédiatement la solution  $u = 1$ ,  $t = 1$ .

Posons  $u = v + h$ ; il vient

$$v^4 + 4hv^3 + (6h^2 - 5)v^2 + (4h^3 - 10h)v + 1 = t^2.$$

Faisons  $h = 1$ :

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = t^2.$$

1° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

$$m = 2 \quad \text{donne} \quad v = -2, \quad u = -1,$$

solution évidente *a priori*;

$$m = -3 \quad \text{donne} \quad v = 1, \quad u = 2.$$

2° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 2 \quad \text{donne} \quad v = -2, \quad u = -1,$$

$$m = 3 \quad \text{»} \quad v = -3, \quad u = -2.$$

3° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = 2, \quad n = 1, \quad v = -2, \quad u = -1.$$

4° Posons

$$v^4 + 4v^3 + v^2 - 6v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2;$$

$$n = -3, \quad m = -4, \quad v = -\frac{4}{3}, \quad u = -\frac{1}{3}.$$

Comme le signe de  $u$  est arbitraire, on a les solutions

$$u = 1, 2, \frac{1}{3},$$

ce qui donne pour l'équation proposée les solutions

$$(1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 3, 19).$$

Faisons maintenant  $h = 2$ .

1°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv + 1)^2;$$

$$m = 4, \quad v = -4, \quad u = -2,$$

$$m = 6, \quad v = -\frac{19}{4}, \quad u = -\frac{11}{4}, \quad z = 79.$$

2°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv - 1)^2;$$

$$m = 4, \quad v = -4, \quad u = -2,$$

$$m = -6, \quad v = \frac{3}{4}, \quad u = \frac{11}{4}.$$

3°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = 4, \quad n = \frac{3}{2}, \quad 12v + 1 = 12v + \frac{n}{4},$$

$$v = \infty, \quad u = \infty, \quad y = 0.$$

4°

$$v^4 + 8v^3 + 19v^2 + 12v + 1 = (mv^2 + nv + 1)^2;$$

$$n = 6, \quad m = -\frac{17}{2}, \quad v = \frac{88}{57}, \quad u = \frac{202}{57}, \quad z = 32479.$$

On a les nouvelles solutions

$$(11, 4, 79), (202, 57, 32479).$$

3. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers et tels que le carré de l'hypoténuse, augmente ou diminué du double de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.*

Les côtés et l'aire d'un triangle rectangle en nombres

entiers sont donnés par les formules

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2, \quad s = pq(p^2 - q^2).$$

Il faut donc que l'on ait

$$(1) \quad p^4 + 2p^3q + 2p^2q^2 - 2pq^3 + q^4 = r^2,$$

ou, en posant  $\frac{p}{q} = u$ ,

$$(2) \quad u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = \frac{r^2}{q^4} = t^2.$$

1° Il suffit de chercher les solutions de l'équation (1) en nombres premiers entre eux, car tous les triangles semblables jouiront de la même propriété.

2° Les deux solutions  $u = \frac{a}{b}$  et  $u = -\frac{b}{a}$  sont équivalentes. Si l'on écrit la valeur de  $u$  de telle sorte que le numérateur soit plus grand que le dénominateur en valeur absolue, le carré de l'hypoténuse devra être augmenté ou diminué du double de l'aire du triangle, suivant que cette valeur de  $u$  sera positive ou négative.

Cherchons d'abord une solution de l'équation (2) en posant

$$u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = (u^2 + mu + 1)^2;$$

$$m = 1 \quad \text{donne} \quad u = -4, \quad p = 4, \quad q = 1,$$

$$x = 15, \quad y = 8, \quad z = 17, \quad 2s = 20, \quad z^2 - 2s = 13^2;$$

$$m = -1, \quad u = \frac{1}{4}, \quad \text{même solution.}$$

$$u^4 + 2u^3 + 2u^2 - 2u + 1 = (mu^2 + nu + 1)^2;$$

$$n = -1, \quad m = \frac{1}{2}, \quad u = -4,$$

solution déjà trouvée.

Soient, en général,  $h$  une solution de l'équation (2),  $k^2$  le résultat de sa substitution dans le premier membre.

Posons  $u = v + h$ ; l'équation deviendra

$$v^4 + (4h + 2)v^3 + (6h^2 + 6h + 2)v^2 + (4h^3 + 6h^2 + 4h - 2)v + k^2 = t^2.$$

Faisons  $h = -4$  :

1°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv + 13)^2;$$

$$m = -7, \quad v = 4, \quad u = 0,$$

solution inadmissible ;

$$m = -\frac{89}{13}, \quad v = \frac{191}{52}, \quad u = -\frac{17}{52}, \quad p = 52, \quad q = 17,$$

$$x = 2415, \quad y = 1768, \quad z = 2993, \quad z^2 + 2s = 3637^2.$$

2°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv - 13)^2;$$

$$m = -7, \quad v = \frac{120}{17}, \quad u = \frac{52}{17},$$

solution équivalente à la précédente ;

$$m = \frac{89}{13}, \quad v = \frac{2993}{1560},$$

$$u = -\frac{3247}{1560}, \quad p = 3247, \quad q = 1560,$$

$$x = 8109409, \quad y = 10130740, \quad z = 12976609,$$

$$z^2 - 2s = 9286489^2.$$

3°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (v^2 + mv + n)^2;$$

$$m = -7, \quad n = \frac{25}{2}, \quad v = \frac{17}{4}, \quad u = \frac{1}{4},$$

solution équivalente à  $-4$ .

4°

$$v^4 - 14v^3 + 74v^2 - 178v + 169 = (mv^2 + nv + 13)^2;$$

$$n = -89, \quad m = -\frac{7847}{2},$$

$$v = \frac{2793476}{61575405}, \quad u = -\frac{243508144}{61575405},$$

$$x = 55504685693410711, \quad y = 29988225175196640, \\ z = 63087746695238761, \quad z^2 - 2s = 3363994206872969^2.$$

Les mêmes méthodes, appliquées aux solutions obtenues, en feront trouver d'autres indéfiniment.

4. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que le carré de l'hypoténuse, augmenté ou diminué de l'aire du triangle, soit égal à un carré parfait.*

En adoptant les mêmes notations que précédemment, l'équation du problème est

$$(1) \quad p^4 + p^3q + 2p^2q^2 - pq^3 + q^4 = r^2$$

ou

$$(2) \quad u^4 + u^3 + 2u^2 - u + 1 = t^2.$$

La méthode précédente, appliquée directement à l'équation (2), donne la solution

$$u = -8, \quad p = 8, \quad q = 1, \\ x = 63, \quad y = 16, \quad z = 65, \quad s = 504, \quad z^2 - s = 61^2.$$

Posons  $u = v + h$ ; il vient

$$v^4 + (4h + 1)v^3 + (6h^2 + 3h + 2)v^2 \\ + (4h^3 + 3h^2 + 4h - 1)v + h^4 = t^2.$$



Faisons  $h = -8$  :

1°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv + 61)^2;$$

$$m = -\frac{31}{2} \quad \text{donne} \quad v = 8, \quad u = 0,$$

qui ne donne pas de triangle ;

$$m = -\frac{1889}{122}, \quad v = \frac{3839}{488}, \quad u = -\frac{65}{488} \quad \text{ou} \quad u = \frac{488}{65},$$

$$x = 233919, \quad y = 63440, \quad z = 242369, \quad z^2 + s = 257211^2.$$

2°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv - 61)^2;$$

$$m = -\frac{31}{2}, \quad v = \frac{1008}{65}, \quad u = \frac{488}{65},$$

solution identique à la précédente ;

$$m = \frac{1889}{122}, \quad v = \frac{242369}{61288},$$

$$u = -\frac{249535}{61488}, \quad p = 249535, \quad q = 61488,$$

$$x = 58486942081, \quad y = 30686816160, \quad z = 66048490369, \\ z^2 - s = 58864370041^2.$$

3°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (v^2 + mv + n)^2,$$

$$m = -\frac{31}{2}, \quad n = \frac{487}{8}, \quad v = \frac{65}{8}, \quad u = \frac{1}{8},$$

solution identique à  $u = -8$ .

4°

$$v^4 - 31v^3 + 362v^2 - 1889v + 61^2 = (mv^2 + nv + 61)^2;$$

$$n = -\frac{1889}{122}, \quad m = \frac{1819687}{122^3},$$

$$v = \frac{21553073880}{2791363773}, \quad u = -\frac{777836304}{2791363773},$$

( 160 )

$$x = 7186232337356415113,$$

$$y = 4342448160619629984,$$

$$z = 8396290968997175945,$$

$$\sqrt{z^2 + s} = 9152048360162401489.$$

Au moyen des solutions déjà obtenues, on pourra en trouver d'autres indéfiniment.

5. *Trouver tous les triangles rectangles en nombres entiers, tels que l'aire du triangle, augmentée des carrés construits sur les trois côtés, soit égale à un carré parfait.*

L'équation à satisfaire est

$$pq(p^2 - q^2) + 2(p^2 + q^2)^2 = r^2$$

ou

$$pq(p + q)(p - q) + 2(p^2 + q^2)^2 = r^2.$$

Or, dans les quatre nombres  $p$ ,  $q$ ,  $p + q$ ,  $p - q$ , il y a nécessairement un multiple de 3, et il n'y en a qu'un seul, puisque  $p$  et  $q$  sont supposés premiers entre eux : le premier membre de l'équation est donc de la forme  $3m + 2$ , incompatible avec celle d'un carré; il en résulte que le problème proposé n'a pas de solution.

On voit de même qu'il n'existe pas de triangle rectangle en nombres entiers tel que la somme des carrés des trois côtés, diminuée de l'aire du triangle, soit un carré parfait.

---

---

## NOTE SUR LA CARDIOÏDE ET LE LIMAÇON DE PASCAL;

PAR M. WEILL.

---

Considérons deux circonférences se coupant aux points A et B. Par le point A menons une sécante quelconque

rencontrant les deux circonférences aux points C et D, et menons en ces points les tangentes qui se rencontrent en M. Lorsque la sécante pivote autour du point A, l'angle  $\widehat{CMD}$  reste constant; les quatre points C, M, D, B sont sur une même circonférence qui a pour enveloppe le lieu décrit par le point M. Ce lieu est une cardioïde ayant le point B pour point de rebroussement; si l'on mène au point A les tangentes aux deux circonférences données, ces deux droites déterminent respectivement sur les circonférences un point où elles sont touchées par la cardioïde. On en déduit les conséquences suivantes :

**THÉORÈME I.** — *On considère deux coniques se coupant en A, B, I, J. Une sécante menée par le point A rencontre les coniques en C et D; on mène en ces points les tangentes qui se rencontrent en M :*

1° *Le rapport anharmonique de quatre quelconques des cinq droites MC, MD, MB, MI, MJ reste constant quand la sécante tourne autour du point A.*

2° *Les six points M, C, D, B, I, J sont sur une même conique, qui a pour enveloppe le lieu du point M.*

3° *Le lieu du point M est une courbe du quatrième degré ayant les points B, I, J pour points de rebroussement et tangente à chacune des coniques au point où elle est rencontrée par la tangente menée à l'autre au point M.*

**THÉORÈME II.** — *Étant donnée une courbe quelconque du quatrième degré possédant trois points de rebroussement, par un point A de son plan on peut mener deux coniques touchant la courbe et passant par les trois points de rebroussement; la droite qui joint le point A au point où l'une des deux coniques touche la courbe est tangente à l'autre conique.*

**THÉORÈME III.** — *Étant donnée une courbe quelconque*

*du quatrième degré possédant trois points de rebroussement et une droite quelconque D, les quatre points de rencontre de cette droite D avec la courbe et les quatre points où cette même droite est touchée par les quatre coniques qui passent par les points de rebroussement et touchent la courbe se correspondent deux à deux, c'est-à-dire que, lorsque les coordonnées d'un des points du premier groupe sont données, celles d'un point du deuxième groupe sont des fonctions rationnelles des premières, et inversement.*

Pour démontrer ce théorème, considérons une courbe du quatrième degré ayant M, N, P pour points de rebroussement, prenons sur cette courbe un point K et menons par ce point une droite D; la conique qui passe par les quatre points M, N, P, K, en touchant la courbe considérée au point K, rencontre la droite D en un second point L; la conique qui touche la droite D au point L et qui passe par les points M, N, P touche la courbe considérée, en vertu du théorème précédent; à chaque point de rencontre de la droite D avec la courbe correspondra donc une conique et une seule touchant la droite D, passant par les trois points de rebroussement et touchant la courbe. La proposition est donc établie.

Appelons *cercle générateur de la cardioïde* le cercle variable qui passe par le point de rebroussement et touche la courbe.

**THÉORÈME IV.** — *Si d'un point fixe P on mène les tangentes à la série des cercles générateurs de la cardioïde, le lieu des points de contact de ces tangentes est une courbe du sixième degré ayant un point double au point P et trois points triples, dont deux sont les ombilics du plan et le troisième est le point de rebroussement de la cardioïde; les tangentes en ce point triplé*

sont la droite qui joint le point au point P et les deux bissectrices des angles formés par cette droite avec la tangente à la cardioïde. La courbe du sixième degré est unicursale.

Pour établir ce théorème, il suffit de remarquer que le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe P à un système de coniques ayant pour caractéristiques  $\mu, \nu$  est une courbe de degré  $\mu + \nu$  ayant au point P un point multiple d'ordre  $\mu$ . Or, on a ici

$$\mu = 2, \quad \nu = 4.$$

**THÉORÈME V.** — *Étant donnée une courbe quelconque du quatrième degré possédant trois points de rebroussement, si d'un point fixe P on mène les tangentes à toutes les coniques passant par les trois points de rebroussement et tangentes à la courbe, le lieu de leurs points de contact est une courbe du sixième degré, unicursale, ayant un point double au point P et trois points triples aux trois points de rebroussement; les tangentes en chacun des points triples se déterminent individuellement; l'une d'elles passe au point P.*

**THÉORÈME VI.** — *Étant donnée une parabole et un point P dans son plan, on considère une tangente quelconque à la parabole et on mène un cercle tangent à cette droite et passant par le point P et le foyer de la parabole; le lieu des points de contact est une courbe du troisième degré; toute tangente à la parabole rencontre cette courbe du troisième degré en trois points que l'on peut trouver par la règle et le compas; en d'autres termes, l'équation du troisième degré dont dépend le problème a toujours une racine commensurable.*

Une propriété analogue se trouvera dans tout pro-

blème où il s'agira de trouver le lieu des points de contact des cercles passant par deux points fixes avec un système de droites ou de cercles dont le mouvement est déterminé. Cette remarque est susceptible d'une généralisation bien plus grande et donne des équations dont le premier membre se décompose, par suite d'une propriété géométrique qui permet de distinguer certaines racines des autres; on ne peut pourtant en conclure que les points qui correspondent à ces racines décrivent des courbes distinctes.

**THÉORÈME VII.** — *Si d'un point P pris sur la cardioïde on mène les tangentes à l'un des cercles générateurs, les points de contact se déterminent individuellement. Quand on considère le système des cercles générateurs, le lieu des points de contact des tangentes menées du point P se compose de deux courbes distinctes; l'une est le cercle générateur qui passe au point P, et l'autre est une anallagmatique du quatrième degré ayant un point double au point de rebroussement de la cardioïde.*

**THÉORÈME VIII.** — *Par un point fixe P pris sur une parabole et par le foyer on mène un cercle tangent à une tangente variable de la courbe; le lieu des points de contact se compose d'une droite et d'une conique; la droite est la tangente au point P à la parabole.*

**THÉORÈME IX.** — *On considère une conique, un triangle circonscrit ABC et un point fixe P pris sur la courbe. Par ces quatre points on fait passer une conique tangente à une tangente variable de la conique fixe; les points de contact des deux coniques qui répondent à la question se déterminent individuellement; l'un d'eux décrit une droite et l'autre une conique.*

**THÉORÈME X.** — *Étant donnée une courbe du qua-*

*trième degré à trois points de rebroussement, si l'on considère une conique passant par ces trois points et tangente à la courbe, les points de contact des tangentes menées d'un point P de la courbe à cette conique se déterminent individuellement; lorsque la conique varie, le point P restant fixe, le lieu des points de contact se compose de deux courbes distinctes; l'une est la conique qui passe par les trois points de rebroussement et touche la courbe au point P; l'autre est une courbe du quatrième degré ayant les trois points de rebroussement pour points doubles et qui est, par suite, unicursale.*

Les quatre derniers théorèmes que nous venons d'énoncer, et qui découlent de la même propriété, présentent l'exemple remarquable d'un système de deux points qu'aucune propriété géométrique ne semble distinguer et qui décrivent deux courbes entièrement différentes; on explique facilement ce résultat en observant que la quantité placée sous le radical carré introduit par la résolution de l'équation du second degré dont dépend la question est un carré parfait pour une position convenable du point P; ce cas se présente justement quand ce point fixe est situé sur la courbe considérée; le double signe du radical donne alors deux courbes différentes.

Considérons deux circonférences ayant pour centres O et O', et un point M; soient MA et MB deux tangentes menées par ce point aux deux circonférences. Menons les droites OC, O'C respectivement parallèles à AM et MB, et joignons CM; cette droite rencontre en un point P la circonférence qui passe par les points O, C, O'. Ceci posé, si le point M se déplace de manière que l'angle AMB reste constant, la longueur CM sera constante et le point P sera un point fixe; dès lors, le point M décrit un *limaçon de Pascal* ayant le point P pour point double et le cercle OCO' pour *cercle directeur*; ce résultat est bien connu.

Si l'on mène la tangente  $M'B'$  au cercle  $O'$  qui est parallèle à  $MB$ , elle détermine sur  $MA$  un point  $M'$ , et le lieu de ce point est un deuxième *limaçon de Pascal* ayant pour point double un point  $Q$  situé sur le cercle  $OCO'$ .

Les deux points  $P$  et  $Q$  sont tels, comme le montre un raisonnement fort simple, que l'on voit de ces points les deux circonférences  $O$  et  $O'$  sous le même angle; ces points sont donc à l'intersection de la circonférence  $OCO'$  et de la circonférence qui a pour diamètre la droite  $SS'$  qui joint les centres de similitude des deux circonférences.

Le lieu des points d'où les tangentes menées à deux circonférences font un angle donné  $\alpha$  se compose donc (lorsque l'angle  $\alpha$  est bien défini) de deux *limaçons*. Si l'angle  $\alpha$  varie, les points doubles  $P$  et  $Q$  des deux *limaçons* se meuvent sur une circonférence, et la droite  $PQ$  passe par un point fixe; le même résultat a lieu si les rayons des deux circonférences changent, leur rapport restant constant. Supposons les deux circonférences invariables, ainsi que l'angle  $\alpha$ ; le *limaçon de Pascal* correspondant et ayant le point  $P$  pour point double est doublement tangent à chacune des circonférences, et les droites qui joignent les points de contact se coupent sur l'axe de symétrie de la courbe. On en conclut les théorèmes suivants:

**THÉORÈME XI.** — *On considère une circonférence variable dont le centre se meut sur une circonférence fixe et qui est vue d'un point  $P$  de cette circonférence sous un angle donné  $\omega$ ; cette circonférence a pour enveloppe un limaçon de Pascal ayant le point  $P$  pour point double; considérant deux quelconques de ces circonférences comme fixes, l'angle circonscrit et ayant son sommet en un point quelconque du limaçon sera con-*



*stant; la circonférence variable est orthogonale à une circonférence fixe.*

**THÉORÈME XII.** — *Un cercle doublement tangent à une conique et dont le centre est sur l'axe non focal est vu d'un foyer sous un angle constant et égal au supplément de l'angle des asymptotes.*

**THÉORÈME XIII.** — *Le lieu des foyers des coniques qui restent semblables à elles-mêmes et doublement tangentes à un cercle fixe (la corde de contact étant parallèle à l'axe focal), et qui sont assujetties à une autre condition simple quelconque, est un cercle concentrique au cercle donné.*

**THÉORÈME XIV.** — *Si l'on considère une suite de cercles ayant leurs centres sur le cercle directeur d'un limaçon de Pascal et doublement tangents à cette courbe, le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P du plan à ces cercles est une courbe du sixième degré ayant pour points doubles le point P et le point double du limaçon et pour points triples les ombilics du plan.*

Considérons une circonférence O et le limaçon de Pascal ayant cette circonférence pour directrice et un point P de cette circonférence pour point double. Considérons la circonférence qui a son centre en un point A de cette circonférence et qui est doublement tangente au limaçon. Soit un point M du limaçon situé sur le rayon vecteur PM qui rencontre la circonférence en un point B. Menons la droite AB et par le point M une parallèle MC à cette droite; MC touchera au point C la circonférence A; le rayon CA rencontre la circonférence O en un point D. Le cercle qui a pour diamètre MD touche le limaçon au point M et passe par le point double P et par

le point de contact C de la tangente MC menée du point M au cercle A. On a donc les théorèmes suivants :

**THÉORÈME XV.** — *Étant donnée une circonférence ayant son centre sur le cercle directeur d'un limaçon de Pascal et doublement tangente à la courbe, les points de contact des tangentes menées à cette circonférence par un point M du limaçon se déterminent individuellement; si la circonférence varie, l'un des points de contact décrit la circonférence qui touche le limaçon au point M en passant par le point double, et l'autre décrit une anallagmatique du quatrième degré.*

**THÉORÈME XVI.** — *Étant donnés un cercle doublement tangent à un limaçon de Pascal et ayant son centre sur le cercle directeur, et une droite D tangente à ce cercle, l'équation du quatrième degré qui donne les points de rencontre de la droite D avec la courbe a une racine rationnelle en fonction des coefficients.*

**THÉORÈME XVII.** — *Si l'on considère un point A d'une conique et un cercle C doublement tangent à la courbe (la corde de contact étant parallèle à l'axe focal), les deux cercles qu'on peut mener par le point A et le foyer F tangentielllement au cercle C se déterminent individuellement; le point de contact du cercle C avec l'un d'eux se trouve sur la tangente menée par le point A à la conique.*

Le théorème que nous venons d'énoncer se prête à un grand nombre d'énoncés différents, car il établit une relation entre les tangentes qu'on peut mener par un point à une conique, les foyers et les deux cercles qu'on peut mener par le point ayant avec la conique un double contact, la corde de contact étant parallèle à l'axe focal. On a, en particulier, les théorèmes suivants :

**THÉORÈME XVIII.** — *Le lieu des foyers d'une conique tangente à une droite D en un point A et doublement tangente à un cercle C (la corde de contact étant parallèle à l'axe focal) se compose de deux cercles passant par le point A et respectivement tangents au cercle C aux points où il est rencontré par la droite D.*

**THÉORÈME XIX.** — *Le lieu des foyers des coniques doublement tangentes à deux circonférences se compose d'une droite et d'une circonférence, pourvu que les cordes de contact soient parallèles dans les deux circonférences.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer, d'après le théorème XII, que du foyer on voit sous le même angle deux circonférences doublement tangentes à la conique et ayant leurs centres sur l'axe non focal.

Considérons deux courbes quelconques et un angle AMB formé par les tangentes MA et MB menées du point M aux deux courbes; lorsque le point M se déplace, l'angle AMB restant constant, le cercle circonscrit au triangle AMB a deux enveloppes; l'une est le lieu du point M, car, pour mener la tangente en M au lieu décrit par ce point, on peut remplacer les deux courbes, dans le voisinage des points A et B, par ces points eux-mêmes; pour obtenir le point de contact du cercle avec sa deuxième enveloppe, considérons les cercles O et O', osculateurs aux deux courbes en A et B; comme le cercle AMB dépend des éléments infiniment petits du premier ordre, la recherche de son enveloppe ne dépendra que de ceux du deuxième ordre, et l'on pourra substituer aux deux courbes leurs cercles osculateurs; le point de contact du cercle avec sa deuxième enveloppe est donc le point double P du limaçon de Pascal qui constitue le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante AMB cir-



On peut envisager le problème qui consiste à trouver le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à deux circonférences comme un cas particulier du problème suivant :

*Trouver le lieu du sommet d'un angle circonscrit à deux circonférences, les coefficients angulaires des côtés étant liés par une relation linéaire par rapport à chacun d'eux.*

Le lieu est alors du huitième degré; il se décompose lorsque l'angle doit être constant (on a alors deux limaçons de Pascal), ou bien lorsque l'angle doit avoir une bissectrice de direction constante. Dans ce dernier cas, l'équation de chacune des courbes du quatrième degré qui composent le lieu prend une forme remarquable; avec des axes rectangulaires convenablement choisis, cette équation est

$$xy = K\delta + H^2,$$

H et K étant des constantes, et  $\delta$  étant la distance d'un point du lieu à un point fixe situé sur l'hyperbole équilatère qui a pour équation

$$xy - H^2 = 0.$$

## SUR UNE QUESTION DE LICENCE;

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,

D'après M. Catalan (*Nouvelle Correspondance mathématique*, novembre 1880), la solution de la question de licence publiée dans ce Recueil, 2<sup>e</sup> série, t. XX, peut être simplifiée de la manière suivante.

En définitive, remplaçons C par  $\frac{1}{2c}$  et  $ka^2$  par



entre deux tangentes communes menées du pôle, et dont les rayons sont dans le rapport  $k$ .

## CORRESPONDANCE.

Monsieur le Rédacteur,

Voulez-vous bien me permettre de vous adresser quelques observations relativement aux questions 1324 et 1296 et aux solutions qui en ont été données dans le dernier numéro d'octobre. Je dirai tout d'abord qu'en proposant la question 1324 je demandais une démonstration et non une vérification, qui n'offrait aucune difficulté : la question reste donc toujours proposée.

Quant à la question 1296, il est certain que M. Rea-  
lis, en la proposant, a voulu offrir un exercice de vérifi-  
cation aux jeunes lecteurs des *Annales*, car il sait aussi  
bien que personne que les formules qu'il donne sont un  
cas particulier des formules générales de Cauchy démon-  
trées dans le quatrième cahier des *Exercices mathéma-  
tiques*. Il est curieux que l'auteur de la vérification  
arrive, sans y faire attention, à des formules plus simples  
que celles de Cauchy, les formules (2) (2<sup>e</sup> série, t. XIX,  
p. 458), qui, après la suppression du facteur commun  
 $\lambda PQR$ , sont précisément les formules (51) de mon Mé-  
moire (p. 408; 1879). L'identité (3) (p. 459) se trouve  
aussi dans le Mémoire cité (p. 407; 1879). Elle est remar-  
quable en ce qu'elle donne la solution d'une question  
que j'ai proposée autrefois dans les *Nouvelles Annales* :  
*Trouver six nombres entiers  $x, y, z, x', y', z'$  tels que ces  
nombres satisfassent à l'un ou l'autre des deux sys-*

tèmes

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x'^3 + y'^3 + z'^3, & xyz &= x'y'z'; \\ x^3 + y^3 + z^3 &= x'^3 + y'^3 + z'^3, & x + y + z &= x' + y' + z'. \end{aligned}$$

Lors de la dernière réunion à Reims de l'Association pour l'avancement des Sciences, j'ai communiqué les formules (51) à M. Sylvester, qui m'a dit les avoir trouvées de son côté, mais étendues au cas plus général l'équation

$$(1) \quad aX^3 + bY^3 + dXYZ = cZ^3.$$

Voici en quelques mots une démonstration très simple :

$(x, y, z)$ ,  $(x', y', z')$  étant deux solutions de l'équation (1), les formules de Cauchy donnent

$$(2) \quad \begin{cases} X = 3byy'(xy' - yx') - 3czz'(xz' - zx') \\ \quad + d(x^2y'z' - x'^2yz), \\ Y = 3axx'(yx' - xy') - 3czz'(yz' - zy') \\ \quad + d(y^2x'z' - y'^2xz), \\ Z = 3axx'(zz' - xz') + 3byy'(zy' - yz') \\ \quad + d(z^2y'x' - z'^2xy). \end{cases}$$

D'ailleurs, des deux équations

$$ax^3 + by^3 + dxyz = cz^3, \quad ax'^3 + by'^3 + dx'y'z' = cz'^3$$

on tire

$$c(z^3y'^3 - y'^3z'^3) + dyy'(y^2x'z' - y'^2xz)$$

X =



Or la valeur de Y se déduit évidemment de celle de X en permutant  $x, y$  et  $x', y'$ , et comme, par ce changement, tous les facteurs de X restent les mêmes, excepté  $x^2 y' z' - x'^2 y z$ , qui devient  $y^2 x' z' - y'^2 x z$ , on a

$$\frac{X}{Y} = \frac{x^2 y' z' - x'^2 y z}{y^2 x' z' - y'^2 x z}.$$

On obtient de même

$$\frac{Z}{Y} = \frac{z^2 x' y' - z'^2 x y}{y^2 x' z' - y'^2 x z}.$$

Les formules (51) sont donc étendues à l'équation (1).

M. Sylvester, si je ne me trompe, a communiqué sa démonstration à M. Lucas : il serait intéressant qu'elle fût publiée.

Veuillez agréer, Monsieur, etc.

DESBOVES.

# SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

*ces six plans se coupent suivant une même droite (D) qui rencontre  $\rho\rho'$ .* (GENTY.)

Un point est donné par les rapports  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  des aires des tétraèdres  $P\rho BC, P\rho CA, P\rho AB$  et  $PABC$  à l'aire de  $\rho abc$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  les coordonnées de  $\rho'$ ;  $p, q, r, o$  celles de  $d$ . Les coordonnées de  $a, b, c, \rho$  sont

$$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \text{ et } (0, 0, 0, 1).$$

Alors l'équation du plan  $\rho ab$  est

$$(1) \quad \gamma = 0;$$

celle de  $\rho'cd$  est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(2) \quad (p\beta_1 - q\alpha_1)\delta + \delta_1(q\alpha - p\beta) = 0.$$

Le plan  $\rho'ab$  est représenté par

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(3) \quad \delta_1\gamma - \gamma_1\delta = 0,$$

et  $\rho cd$  par

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(4) \quad q\alpha - p\beta = 0.$$

Le plan

$$(p\beta_1 - q\alpha_1)(\gamma_1\delta - \delta_1\gamma) + \gamma_1\delta_1(q\alpha - p\beta) = 0$$

contient les intersections de (1) avec (2) et de (3) avec (4). Alors c'est un des plans de la question. Il y en a deux autres :

$$(q\gamma_1 - r\beta_1)(\alpha_1\delta - \delta_1\alpha) + \alpha_1\delta_1(r\beta - q\gamma) = 0$$

et

$$(r\alpha_1 - p\gamma_1)(\beta_1\delta - \delta_1\beta) + \beta_1\delta_1(p\gamma - r\alpha) = 0.$$

Les premiers membres de ces équations s'annulent par addition. Alors les trois plans passent par une même droite.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

### Question 1313

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 335);

PAR M. S. REALIS.

*Un nombre  $p$ , qui est la somme de  $n$  cubes entiers, étant donné, assigner un nombre  $q$  tel que le produit  $p^2q$  soit la somme algébrique de  $n$  cubes entiers.*

Soit

$$p = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \dots + \alpha_n^3,$$

et posons

$$P_1 = 2\alpha_1^3 + 3\alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2) - (\alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \dots + \alpha_n^3),$$

$$P_2 = 2\alpha_2^3 + 3\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2) - (\alpha_1^3 + \alpha_3^3 + \dots + \alpha_n^3),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$P_n = 2\alpha_n^3 + 3\alpha_n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2) - (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \dots + \alpha_{n-1}^3),$$

$$q = (9 - n)(\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \dots + \alpha_n^3) + 9[\alpha_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2) + \dots + \alpha_n(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}^2)].$$

Nous aurons, par identité,

$$p^2q = P_1^3 + P_2^3 + \dots + P_n^3.$$

*Note.* — La solution donnée, dans le numéro de septembre de nier, par M. Marcello Rochetti, ne répond pas aux termes de l'énoncé

### Question 1342

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX. p. 144 et 479) :

PAR M. A. LEINEKUGEL.

*D'un point donné M on mène deux droites normales à un parabolôïde; soient a et b leurs pieds, le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur la corde ab et β le conjugué harmonique de α relativement aux points a et b; démontrer que le point β est sur la droite menée par M perpendiculairement à l'axe.*

(LAGUERRE.)

Soit D la droite d'intersection des plans tangents en a et en b. Par cette droite D menons le plan diamétral D<sub>1</sub> conjugué aux cordes parallèles à ab et le plan DQ parallèle à ab. Ces quatre plans forment un faisceau harmonique, le plan Mab les coupe suivant un faisceau harmonique de quatre droites et les perpendiculaires abaissées du point M sur ces quatre droites forment aussi un faisceau harmonique. La proposition s'en déduit immédiatement, car dans les parabolôïdes tous les plans diamétraux sont parallèles à l'axe.

*Note.* — La même question a été résolue par M. A. Gentil, élève du lycée de Grenoble.

## Question 1344

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 433 );

PAR M. FRANÇOIS LAUDIERO,

Élève de l'Université de Naples.

*Soient A, B, C, D quatre points d'une conique (S), et M un point quelconque; si l'on mène les droites MA, MB, MC, MD qui rencontrent de nouveau la conique (S) en des points A', B', C', D' respectivement, les deux coniques (M, A, B, C, D), (M, A', B', C', D') auront la même tangente au point M. (GENTY.)*

On sait que, si deux coniques  $\varphi$ ,  $\varphi'$  se coupent aux points A, B, C, D et si l'on mène par A, B respectivement deux droites qui coupent  $\varphi$  en F, G et  $\varphi'$  en F', G', les cordes FG, F'G concourent en un point H de la droite CD, et il est clair que, si les points F', G' sont infiniment voisins, la droite FG et la tangente en F'G' à la conique  $\varphi'$  se coupent sur la droite CD.

Cela posé, désignons par  $\psi$ ,  $\psi'$  les deux coniques

$$(M, A, B, C, D), \quad (M, A', B', C', D')$$

respectivement, et observons que pour les coniques (S),  $\varphi$ , qui se coupent dans les quatre points A, B, C, D, la tangente à la conique  $\varphi$  en M et les cordes CD, B'A' concourent en un même point. De même, pour les coniques (S),  $\varphi'$ , la tangente en M à la conique  $\varphi'$  et les cordes B'A', CD concourent en un même point.

Donc les deux tangentes en M aux coniques  $\varphi$ ,  $\varphi'$  coïncident, et les coniques  $\varphi$ ,  $\varphi'$  ont conséquemment la même tangente au point M.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; F. Pisani; N. Goffart; A. Droz; J. Marchal; H. Herzog, du lycée de Rouen; E. Pecquery, élève du lycée du Havre.

## Question 1348

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 480 );

PAR M. J. BOUDÈNES,

Élève du lycée de Grenoble.

*On donne une parabole P et on propose :**1<sup>o</sup> De trouver l'équation du cercle C qui passe par un point M du plan et par les points de contact des tangentes menées de ce point à la parabole ;**2<sup>o</sup> De trouver le lieu des points M pour lesquels ce cercle a un rayon constant ;**3<sup>o</sup> De trouver le lieu du centre de ce cercle de rayon constant ;**4<sup>o</sup> De démontrer que la polaire du point M par rapport à la parabole et la seconde corde d'intersection du cercle et de la parabole se coupent sur une droite déterminée.* (BARBARIN.)

1<sup>o</sup> On sait que les cordes d'intersection de deux coniques à axes parallèles sont également inclinées sur les directions de ces axes. Dès lors, si nous prenons pour origine le foyer de la parabole et pour axe des  $x$  l'axe de cette courbe, son équation sera

$$(1) \quad y^2 = 2px + p^2,$$

et, si  $\alpha, \beta$  sont les coordonnées du point M, la polaire de ce point sera représentée par l'équation

$$(2) \quad \beta y - p(\alpha + x) + p^2 = 0.$$

Toute conique passant par l'intersection de la droite précédente et de la parabole, et ayant un axe parallèle à celui de cette dernière, aura par suite une équation de

la forme

$$[\beta y - p(x + \alpha) + p^2] \left( y + \frac{p}{n} x + n \right) + \lambda (y^2 - 2px - p^2) = 0.$$

Pour que ce soit un cercle, il faut d'abord que

$$\lambda = - \frac{p^2 + \beta^2}{\beta},$$

et, pour que ce cercle passe par le point M,

$$n = \frac{p(p - \alpha)}{\beta}.$$

L'équation de ce cercle est donc

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{2x}{p} (p^2 + \beta^2) + \frac{2\beta y}{p} (p - \alpha) \\ - [(p - \alpha)^2 + p^2 + \beta^2] = 0. \end{cases}$$

2° Son rayon a pour valeur la distance du centre au point M. Le lieu du point M pour lequel ce cercle a un rayon constant est donc,  $\alpha, \beta$  étant les coordonnées courantes,

$$\left( \frac{p^2 + \beta^2}{p} - \alpha \right)^2 + \left[ \frac{(p - \alpha)\beta}{p} - \beta \right]^2 = R^2$$

ou

$$(p^2 + \beta^2) [(p - \alpha)^2 + \beta^2] = p^2 R^2,$$

équation du quatrième degré qui représente une courbe passant par les points cycliques. Elle devient, si l'on transporte l'origine au point  $x = -p$  sur l'axe des  $x$ ,

$$(4) \quad (p^2 + \beta^2) (x^2 + \beta^2) = p^2 R^2.$$

3° Les coordonnées du centre du cercle de rayon R étant devenues, par la transformation précédente de coordonnées,

$$(5) \quad x = \frac{p^2 + \beta^2}{p}, \quad y = \frac{\alpha\beta}{p},$$

le lieu de ce centre, pour  $R$  constant, a donc pour équation

$$x[y^2 + (x - p)^2] = R^2(x - p),$$

obtenue par l'élimination de  $\alpha$ ,  $\beta$  entre la condition (4) et les équations (5). Ce lieu représente une courbe du troisième degré passant encore par les points circulaires à l'infini.

4° Les deux cordes d'intersection du cercle (3) et de la parabole (1) étant

$$\beta y - p(\alpha + x) + p^2 = 0$$

et

$$\beta y + px + p(p - \alpha) = 0,$$

on voit aisément, en les retranchant, que le lieu de leur point d'intersection est

$$x = 0,$$

et que, par suite, ces deux droites se coupent toujours sur l'axe des  $x$ , c'est-à-dire sur la perpendiculaire à l'axe menée du foyer.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. H. Lez; Moret-Blanc; Baron, élève du lycée Henri IV; G. Lambiotte, élève de l'École polytechnique de Bruxelles; E. Fauquembergue; A. Geneix-Martin; J. Netter, élève du lycée de Nancy.

### Question 1353

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 528);

PAR M. J.-B. DELACOURCELLE,

Enfant de troupe au 53<sup>e</sup> de ligne, à Tarbes.

*Soient ABC un triangle donné, A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> trois points pris sur les côtés de ce triangle et tels qu'on ait*

$$\frac{A_1 B}{A_1 C} = \frac{l}{m}, \quad \frac{B_1 C}{B_1 A} = \frac{l'}{m'}, \quad \frac{C_1 A}{C_1 B} = \frac{l''}{m''};$$



*l'aire du triangle  $A_1 B_1 C_1$  est égale à l'aire du triangle  $ABC$ , multipliée par*

$$\frac{ll'l'' + mm'm''}{(l+m)(l'+m')(l''+m'')}.$$

(GENTY).

Les deux triangles  $AB_1C_1$  et  $ABC$ , ayant un angle égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{AB_1C_1}{ABC} &= \frac{AC_1 \times AB_1}{AB \times AC} = \frac{AC_1}{AB} \times \frac{AB_1}{AC} \\ &= \frac{AC_1}{AC_1 + BC_1} \times \frac{AB_1}{AB_1 + CB_1}; \end{aligned}$$

ou bien

$$(1) \quad \frac{AB_1C_1}{ABC} = \frac{l''}{l''+m''} \times \frac{m'}{l'+m'} = \frac{l''m'}{(l''+m'')(l'+m')}.$$

On obtient de la même manière

$$(2) \quad \frac{BA_1C_1}{ABC} = \frac{lm''}{(l''+m'')(l+m)},$$

$$(3) \quad \frac{CA_1B_1}{ABC} = \frac{l'm}{(l'+m')(l+m)}.$$

Or on a

$$A_1B_1C_1 = ABC - AB_1C_1 - BA_1C_1 - CA_1B_1.$$

En portant, dans cette identité, les valeurs de  $AB_1C_1$ ,  $BA_1C_1$ ,  $CA_1B_1$  tirées des égalités (1), (2), (3), on trouve, toute réduction faite,

$$A_1B_1C_1 = ABC \times \frac{ll'l'' + mm'm''}{(l+m)(l'+m')(l''+m')}.$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. L. Robert, à Montreuil (Seine); Choudadow, de Strawropole (Caucase); A. Droz, à Porrentruy (Berne); H. Lez; E. Fauquembergue, maître répétiteur.

teur au lycée de Saint-Quentin; F. Pisani, professeur à l'Institut royal technique de Messine; J. Boudènes et Désiré Giroud, élèves du lycée de Grenoble; E. Pecquery et É. Chrétien, élèves du lycée du Havre.

### Question 1356

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 48);

PAR MM. E. PECQUERY ET É. CHRÉTIEN,  
Élèves du lycée du Havre.

*Il y a trois cubiques passant par huit points donnés et tangentes à une droite menée par l'un de ces points.*  
(E. G.).

L'équation générale d'une cubique contenant trois paramètres variables, si l'on exprime que la cubique passe par huit points donnés, on aura huit relations détermineront huit des paramètres en fonction du neuvième au premier degré. L'équation générale de la cubique ne contiendra donc finalement qu'un seul paramètre variable au premier degré.

Si maintenant on rapporte la cubique à des axes  $x, y$  dont la droite donnée est l'axe des  $x$ , et l'origine un point donné sur cette droite, pour  $y = 0$  on a d'abord  $x = 0$ , puis deux autres racines données par une équation du second degré en fonction du paramètre variable qui y entre au premier degré.

On exprimera que la cubique est tangente à la droite des  $x$  en écrivant que cette équation du second degré en  $x$  a ses deux racines égales, ce qui donne, en général, une équation du second degré pour déterminer le paramètre variable, ou en exprimant que  $x = 0$  est racine de cette équation, ce qui donne une équation du premier degré pour déterminer le même paramètre. Donc

général, il y a trois valeurs pour ce paramètre, et par suite trois cubiques satisfaisant aux conditions données.

*Note.* — M. Dewulf fait remarquer que le théorème peut être généralisé ainsi :

*Dans un faisceau de courbes de l'ordre  $n$ , il y a, en général,  $2(n-1-\delta)$  courbes tangentes à une droite qui passe par  $\delta$  points de la base du faisceau, en des points autres que ces  $\delta$  points.*

On peut énoncer un théorème analogue où la droite quelconque est remplacée par une courbe de l'ordre  $m$ .

## PUBLICATIONS RÉCENTES.

LEÇONS DE STATIQUE GRAPHIQUE, par *Antonio Favaro*; traduites de l'italien par *Paul Terrier*. 1<sup>re</sup> Partie : Géométrie de position. In-8°, avec figures dans le texte. Prix : 7<sup>fr</sup>. — Paris, Gauthier-Villars; 1879.

COURS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL; par *J.-A. Serret*. 2<sup>e</sup> édition. 2 vol. in-8°, avec figures dans le texte. Prix : 24<sup>fr</sup>. — Paris, Gauthier-Villars; 1880.

TRAITÉ D'ALGÈBRE, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement, par *H. Laurent*. 3<sup>e</sup> édition, revue et mise en harmonie avec les nouveaux programmes. 1<sup>re</sup> Partie, à l'usage des classes de Mathématiques élémentaires; II<sup>e</sup> et III<sup>e</sup> Parties, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales. 3 vol. in-8°, avec figures dans le texte. Prix : 12<sup>fr</sup>. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.

INTRODUCTION A LA MÉTHODE DES QUATERNIONS; par *C.-A. Laisant*. In-8°, avec figures dans le texte. Prix : 6 fr. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.

ANNUAIRE POUR L'AN 1881, publié par le *Bureau des Longitudes*, avec des Notices scientifiques. In-18 de 790 pages, avec figures dans le texte et carte. Prix : 1<sup>fr</sup>, 50. Paris, Gauthier-Villars; 1881.

ANNUAIRE DE L'OBSERVATOIRE DE MONTSOURIS pour l'an 1881. Météorologie, Agriculture, Hygiène. In-18, avec figures dans le texte. Prix : 2<sup>fr</sup>. — Paris, Gauthier-Villars; 1881.

ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage de l'enseignement primaire supérieur, par J.-B.-V. Reynaud. In-8°. — Paris, Delalain; 1879.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, par A. Amiot; revus et augmentés par F. Vintéjoux. In-8°, avec figures dans le texte. — Paris, Delagrave; 1881.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE pour l'enseignement secondaire classique, par E. Lebon. 1<sup>er</sup> volume, à l'usage des classes de Mathématiques élémentaires et Supplément au 1<sup>er</sup> volume, à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr. In-8°, avec figures dans le texte. — Paris, Delalain; 1880 et 1881.

NOTIONS DE TRIGONOMÉTRIE, avec application à des exemples par l'emploi des fonctions trigonométriques naturelles. In-8°. — Tours, 25. rue des Acacias; 1879.

#### TIRAGES A PART.

*Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit*; af H.-G. ZEUTHEN. In-8°. — Copenhague, J.-H. Schultz; 1879.

*Sur la détermination d'intégrales algébriques de différentielles algébriques*; par H.-G. ZEUTHEN. Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*; 1880.

*Sur le principe de la moindre action*; par G.-F.-W. BAEHR. Extrait du t. XIV des *Archives néerlandaises*; 1879.

*Om Poncelet's Betydning for Geometrien*; af ELLING HOLST. In-8°. — Christiania, A.-W. Brogger; 1878.

*Sur l'application d'un principe de la théorie des*

*fonctions à des recherches purement géométriques; par ELLING HOLST. Extrait du t. VIII du Bulletin de la Société mathématique de France; 1880.*

*Notes on the normals of conics; by SAMUEL ROBERTS, M. A. Extrait des Proceedings of the London mathematical Society, vol. IX, n° 128.*

*On the decomposition of certain numbers into sums of two square integers by continued fractions; by SAMUEL ROBERTS. Extrait des Proceedings of the London mathematical Society, vol. IX, n°s 135, 136.*

*On forms of numbers determined by continued fractions; by SAMUEL ROBERTS. Extrait des Proceedings of the London mathematical Society, vol. X, n°s 142, 143.*

*Note on a problem of Fibonacci's; by SAMUEL ROBERTS, F. R. S. Extrait des Proceedings of the London mathematical Society, vol. XI, n° 158.*

*Note on the integral solution of*

$$x^2 - 2Py^2 = -z^2 \text{ or } + 2z^2$$

*in certain cases; by SAMUEL ROBERTS, F. R. S. Extrait des Proceedings of the London mathematical Society, vol. XI, n° 161.*

*Sull' area descritta da una linea invariabile che si move in un piano con determinata legge; Nota del prof. GIUSEPPE BARDELLI. Extrait des Rendiconti del R. Istituto lombardo, série II, vol. XII, fasc. VII; 1879.*

*Estensione di alcuni teoremi sulle forme binarie; Nota di E. D'OVIDIO. Extrait des Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIV; 1879.*

*Sopra alcuni iperboloidi annessi alla cubica gobba; Nota di E. D'OVIDIO. — Turin; 1879.*

*Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie; per E. D'OVIDIO. Extrait du Giornale di Matematiche, vol. XVII; 1879.*



*De la similitude en thermologie*; par J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 3<sup>e</sup> année; 1879.

*Propriétés descriptives nouvelles des sections coniques*; par J. CARNOY. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 4<sup>e</sup> année; 1880.

*Note sur quelques intégrales définies*; par PH. GILBERT. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 4<sup>e</sup> année; 1880.

*Note sur la formule d'addition dans les fonctions elliptiques*; par PH. GILBERT. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 4<sup>e</sup> année; 1880.

*Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre*; par PH. GILBERT. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 4<sup>e</sup> année; 1880.

*Sur l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des aiguilles d'une montre*; par PH. GILBERT. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 4<sup>e</sup> année; 1880.

*Sur quelques questions se rattachant au problème de Pell*; par S. REALIS. Extrait de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI; 1880.

*Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles*; par BIEHLER. Extrait du *Journal de Borchardt*, t. 87; 1879.

*Sur les fonctions doublement périodiques considérées comme des limites de fonctions algébriques*; par CH. BIEHLER. Extrait du *Journal de Borchardt*, t. 88; 1879.

*Thalès de Milet; ce qu'il a emprunté à l'Égypte*; par PAUL TANNERY. Extrait de la *Revue philosophique*, mars 1880.

*Valeur finale de la fonction  $Y_n$  pour des valeurs*

*indéfiniment croissantes de l'entier  $n$* ; par ESCARY. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences*; 1879.

*Sur les nombres de Bernoulli*; par G. DE LONGCHAMPS. Extrait des *Annales de l'École Normale supérieure*, t. VIII; 1879.

*Sur les normales aux coniques*; par G. DE LONGCHAMPS. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences*; 1878.

*Théorèmes sur les normales aux coniques à centre* par G. DE LONGCHAMPS. Extrait de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. IV; 1878.

*Sur les conchoïdales*; par G. DE LONGCHAMPS. Extrait de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V; 1879.

*Sur les cubiques unicursales*; par G. DE LONGCHAMPS. Extrait de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V; 1879.

*Sur les fonctions linéaires*; par A.-E. PELLET. In-8° — Clermont, Thibaud; sans date.

*Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordres supérieurs au premier*; par A.-E. PELLET. In-8°. — Clermont, Mont-Louis; 1879.

*Conférences de Géométrie supérieure*; par L. SATEL. Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux*, t. IV, 2<sup>e</sup> série.

*Mémoire sur les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue*; par H. LAURENT. Extrait du *Journal de Resal*, t. V; 1879.

*Sur la cinématique du plan*; par A. LAISANT. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences*; 1878.

*Mémoire sur les courbes et s*



tiques; par PICQUET. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences*; 1878.

*Sur le mouvement d'un corps qui se déplace et se déforme en restant homothétique à lui-même*; par G. FOURET. Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII; 1879.

*Sur les surfaces de vis*; par G. FOURET. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences*; 1878.

*Considérations sur quelques formules intégrales dont les valeurs peuvent être exprimées en certains cas par la quadrature du cercle*. Mémoire de LÉONARD EULER, publié, conformément au manuscrit autographe, par CH. HENRY. Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. IV; 1880.

*Sur une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  et sur deux approximations de  $\sqrt{3}$* ; par CH. HENRY. Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. III; 1879.

*Sur divers points de la théorie des nombres. Remarques historiques* par CH. HENRY. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences*; 1880.

*Recherches sur les manuscrits de Pierre Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche*; par CH. HENRY. Extrait du *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche*, t. XII; 1879.

*Sur les développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce*; par CH. BIEHLER. In-4°. — Paris, Gauthier-Villars; 1879.

*Sur la théorie des équations*; par CH. BIEHLER. In-4°. — Paris, Gauthier-Villars; 1879.

conduit l'étude des phénomènes d'induction dans les circuits dérivés; par MARCEL BRILLOUIN. In-4°. — Paris Gauthier-Villars; 1880.

*Sur la quadrature des paraboles du troisième degré* par le général PARMENTIER. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences* 1879.

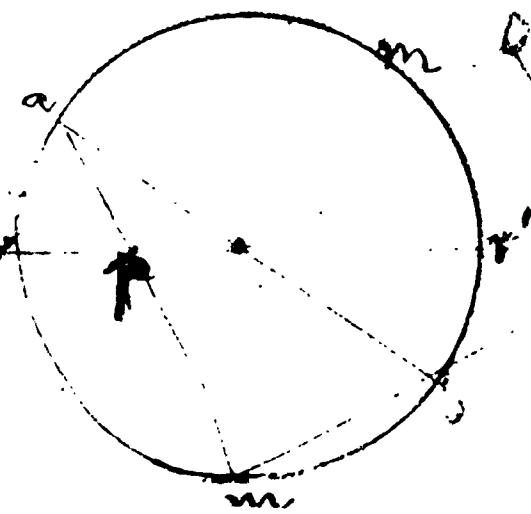
*Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre*; par G. HUMBERT. Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, XLVIII<sup>e</sup> Cahier; 1880.

*Sur la résolution en nombres entiers ou complexes de l'équation  $U^n \pm V^n = S^n + W^n$* ; par M. A. DESBOVE. Extrait des *Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences*; 1880.

### QUESTIONS.

1362. On donne, sur un plan : un point  $o$ , une circonférence, les extrémités  $a, b$  d'un diamètre de cette courbe et un autre diamètre  $D$ . On demande de déterminer, sur la circonférence, un point  $m$  tel que les droites  $ma, mb$  interceptent, sur  $D$ , un segment vu, de point  $o$ , sous un angle droit. (MANNHEIM.)

1363. On donne une ellipse; on prend le triangle  $ac$  formé par les deux tangentes  $ca, cb$  à cette courbe et la corde de contact  $ab$ , et l'on détermine un point  $m$  d'où l'on voit, sous des angles droits, les côtés du triangle  $abc$ . Quelle est la surface lieu des points tels que  $m$ , lorsque l'on prend tous les triangles analogues à  $acb$ ? (MANNHEIM.)



*l'angle droit tournant autour de  
que l'angle droit tournant  
engendre sur le diamètre  
de points en involution  
Les points doubles de ce  
sont les points tournant à 90°*

## REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE STURM;

PAR M. CANDÈZE,

Élève de l'École Polytechnique.

Considérons une équation entière et formons pour cette équation les fonctions de Sturm, que nous désignerons par  $V, V_1, \dots, V_n$ .

On aura

$$(1) \quad V = V_1 Q_1 - V_2,$$

$$(2) \quad V_1 = V_2 Q_2 - V_3,$$

$$(3) \quad V_2 = V_3 Q_3 - V_4,$$

.....

$$(n-1) \quad V_{(n-2)} = V_{(n-1)} Q_{(n-1)} - V_n.$$

Nous supposons que  $V_n$  est une constante, c'est-à-dire que  $V$  et  $V_1$  sont premiers entre eux.

Remarquons que, lorsque  $V = 0$ ,  $V_1 Q_1 = V_2$ , c'est-à-dire que  $Q_1 V_2$  a le signe de  $V_1$ . Le polynôme  $Q_1 V_2$  jouit donc, relativement au polynôme  $V$ , des propriétés de  $V'$ , sur lesquelles est fondé le théorème de Rolle, c'est-à-dire qu'entre deux racines réelles de  $V$  se trouve au moins une racine de  $V_2 Q_1$ . Cette remarque, en particulier, nous donne un moyen de séparer les racines d'une équation du troisième degré par des nombres commensurables. En effet,  $Q_1$  et  $V_2$  sont tous les deux du premier degré, et leurs racines séparent les trois racines du polynôme considéré (si le polynôme a ses trois racines réelles).

Cela posé, supposons que  $V = 0$  pour une certaine valeur de  $x$ ; on a

$$(1') \quad V_1 Q_1 = V_2.$$

Portons dans la seconde équation la valeur de  $V_2$  ; on aura

$$(2') \quad V_1(1 - Q_1 Q_2) = -V_3,$$

ce qui nous montre que  $V_3(Q_1 Q_2 - 1)$  jouit encore des mêmes propriétés que  $V_1$ .

Tirons  $V_3$  de (2'), et portons sa valeur, ainsi que celle de  $V_2$ , dans l'équation (3); elle deviendra

$$(3') \quad V_1 Q_1 = V_1(Q_1 Q_2 - 1)Q_3 - V_4,$$

c'est-à-dire

$$V_1[(Q_1 Q_2 - 1)Q_3 - Q_1] = V_4.$$

Nous continuerons de même jusqu'à la dernière équation.

Or remarquons que les facteurs successifs de  $V_1$  dans les diverses équations que nous obtenons ainsi ne sont autres que les numérateurs des réduites successives de la fraction continue

$$Q_1 - \frac{1}{Q_2 - \frac{1}{Q_3 - \dots}}$$

On le vérifie facilement pour les premières réduites, et l'on en déduit sans peine la loi générale.

Je dis que les numérateurs de ces réduites jouissent des mêmes propriétés que les fonctions de Sturm.

1° Deux fonctions consécutives ne peuvent pas s'annuler en même temps, car pour cela deux fonctions consécutives de Sturm devraient s'annuler.

2° Lorsqu'une fonction s'annule, les deux fonctions qui la comprennent sont de signes contraires.

En effet, les numérateurs de trois réduites consécutives de la fraction continue sont, comme on le verra

facilement, liés par la relation

$$P_{(r-1)} = P_r Q_r - P_{(r+1)}.$$

3° Considérons d'abord la fraction continue comme ayant pour dernier quotient  $Q_{n-1}$ . Si l'on désigne par  $P_{(n-1)}$  le numérateur de la réduite correspondante, on a

$$V_1 P_{(n-1)} = V_n$$

lorsque  $V = 0$ .

$V_n$  est positif ou négatif. S'il est positif, la suite

$$V, P_{(n-1)}, P_{(n-2)}, \dots, P_2, P_1, 1,$$

$P_1$  n'étant autre que  $Q_1$ ,  $P_2$  que  $Q_1 Q_2 - 1$ , ..., jouit des mêmes propriétés que la suite de Sturm, puisque le dernier terme est une constante et que  $P_{(n-1)}$  jouit des mêmes propriétés que  $V_1$ .

Si  $V_n$  est négatif, ce sera la suite

$$V, -P_{(n-1)}, -P_{(n-2)}, \dots, -P_1, -1$$

qu'il faudra conserver.

Dès lors, il suffira de substituer  $x$  dans  $Q_1, Q_2, \dots$  et de former les réduites successives, ou, pour mieux dire, leurs numérateurs. On pourra se dispenser, d'ailleurs, de substituer directement dans  $V$  la valeur de  $x$ . En effet, remarquons que

$$\frac{V}{V_1} = Q_1 - \frac{1}{Q_2 - \frac{1}{Q_{n-1} - \frac{1}{\frac{V_{n-1}}{V_n}}}}$$

Alors  $\frac{V}{V_1}$  sera la dernière réduite de cette fraction continue;  $V$  sera donc, au signe près, identiquement égal au numérateur. On déterminera ce signe une fois pour

toutes, et l'on aura alors une suite dans laquelle les substitutions seront plus aisées que dans les fonctions de Sturm.

$Q_1, Q_2, \dots$  sont des fonctions dont les coefficients ne sont pas en général entiers, ceux de  $V$  étant supposés entiers; dans les opérations successives que l'on fait, on rend les coefficients entiers en multipliant par des nombres convenables et toujours affectés du signe  $+$ .

On devra alors modifier la fraction continue.

Supposons que l'on ait multiplié la première identité  $V = V_1 Q_1 - V_2$  par  $\alpha$  :

$$\alpha V = \alpha V_1 Q_1 - \alpha V_2 = V_1 Q'_1 - V'_2.$$

Continuons l'opération :

$$V_1 = V'_2 Q_2 - V_3.$$

Supposons qu'il faille multiplier encore par  $\beta$  :

$$\beta V_1 = V'_2 Q'_2 - V'_3.$$

On a

$$\frac{\alpha V}{V_1} = Q'_1 - \frac{1}{\frac{V_1}{V'_2}} = Q'_1 - \frac{\beta}{\frac{\beta V_1}{V'_2}} = Q'_1 - \frac{\beta}{Q'_2 - \frac{1}{\frac{V'_2}{V'_3}}}.$$

On continuerait ainsi, et l'on voit que l'on obtient une fraction continue où toutes les fonctions auront leurs coefficients entiers et dont les réduites jouiront encore des propriétés démontrées plus haut.

Nous donnons ci-dessous un calcul des fonctions pour l'équation

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0;$$

on a

$$\frac{3x^3 - 18x^2 + 33x - 18}{3x^2 - 12x + 11} = x - 2 - \frac{2}{3x - 6 - \frac{1}{x - 2}}.$$

# SUR LA CONSTRUCTION DE LA NORMALE DANS UN CERTAIN MODE DE GÉNÉRATION DES COURBES PLANES;

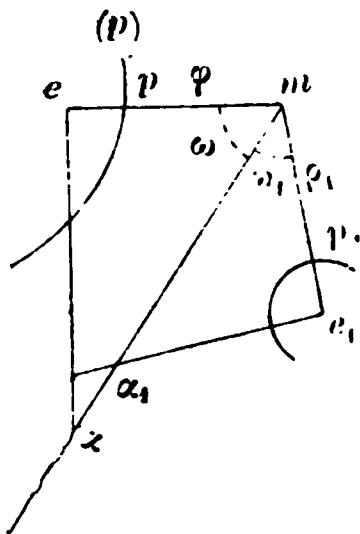
PAR M. MAURICE D'OCAGNE,

Élève de l'École Polytechnique.

Considérons dans un plan deux courbes fixes  $(p)$  et  $(p_1)$ . Soient  $mp$  une normale à la courbe  $(p)$ ,  $mp_1$  une normale à la courbe  $(p_1)$ ,  $m$  leur point de rencontre; si nous posons  $mp = \rho$ ,  $mp_1 = \rho_1$ , le lieu  $(m)$  du point  $m$  sera défini par une relation de la forme  $F(\rho, \rho_1) = 0$ .

Proposons-nous de construire la normale en un point  $m$  de la courbe  $(m)$ .

Soient  $\alpha$  et  $\alpha_1$  les points où cette normale est coupée par les normales aux enveloppes des droites  $mp$  et  $mp_1$ , c'est-à-dire par les perpendiculaires aux droites  $mp$  et



$mp_1$ , aux points  $e$  et  $e_1$ , centres de courbure des courbes  $(p)$  et  $(p_1)$  respectivement relatifs aux points  $p$  et  $p_1$ .

Pour un déplacement infiniment petit du point  $m$ , on a, d'après un principe connu de Géométrie cinématique <sup>(1)</sup>, en appelant  $d\theta$  et  $d\theta_1$  les angles de contingence

<sup>(1)</sup> MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive*, p. 603.

respectifs des enveloppes  $mp$  et  $mp_1$ ,

$$d\rho = e x . d\theta, \quad d\rho_1 = e_1 x_1 . d\theta_1.$$

d'où

$$(1) \quad \frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{e x . d\theta}{e_1 x_1 . d\theta_1}.$$

Mais, le déplacement infiniment petit du point  $n$  représenté par  $d(m)$ , on sait que <sup>(1)</sup>

$$d(m) = m x . d\theta.$$

et de même

$$d(m) = m x_1 . d\theta_1.$$

d'où il résulte que

$$\frac{d\theta}{d\theta_1} = \frac{m x_1}{m x}.$$

La relation (1) devient donc

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{e x . m x_1}{e x_1 . m x}$$

ou

$$(2) \quad \frac{d\rho}{d\rho_1} = \frac{\sin \omega}{\sin \omega_1}.$$

Or on a, par différentiation de l'équation courbe,

$$F'_\rho d\rho + F'_{\rho_1} d\rho_1 = 0,$$

d'où

$$\frac{d\rho}{d\rho_1} = - \frac{F'_{\rho_1}}{F'_\rho},$$

et, par comparaison avec la relation (2),

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega_1} = - \frac{F'_{\rho_1}}{F'_\rho}.$$

De là la règle suivante :

*On porte respectivement sur  $mp$  et sur  $mp_1$  de*

(1) Même Ouvrage, même page.



guez proportionnelles à  $F'_\rho$  et  $F'_{\rho_1}$ ; sur les droites ainsi obtenues on construit un parallélogramme : la diagonale de ce parallélogramme passant par le point  $m$  est la normale cherchée.

Il y a lieu de faire la distinction suivante : en supposant l'une des longueurs ci-dessus désignées constamment portée dans le sens de  $m$  vers  $p$ , il faudra porter l'autre dans le sens de  $m$  vers  $p_1$  ou en sens contraire, suivant que le rapport  $\frac{\sin \omega}{\sin \omega_1}$  sera négatif ou positif, parce que, dans un cas, les angles  $\omega$  et  $\omega_1$  doivent être comptés en sens inverses, et, dans l'autre, dans le même sens.

Comme cas particuliers de ce théorème général, on a les théorèmes de Joachimsthal, proposés par M. Frenet dans son *Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal*, p. 33.

Il est aisé de voir que la courbe dont l'équation en coordonnées bipolaires est la même que l'équation de la courbe  $(m)$  rapportée aux courbes  $(p)$  et  $(p_1)$  sera tangente à celle-ci au point  $m$ , si l'on prend pour pôles les points  $p$  et  $p_1$  correspondant à ce point  $m$ .

Faisons une application de ce qui précède. Supposons qu'on prenne pour courbes fixes un point et un cercle, et pour équation

$$\rho - K\rho_1 = 0,$$

$K$  étant une constante. La courbe ainsi définie est un *ovale de Descartes* <sup>(1)</sup>; comme, dans ce cas, on a

$$F'_\rho = 1, \quad F'_{\rho_1} = -K,$$

et par suite

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega_1} = -\frac{F'_{\rho_1}}{F'_\rho} = K,$$

---

(1) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 428.

on voit facilement quelle est la construction de la normale par application de la règle générale.

Appelant  $p$  le point fixe,  $p_1$  un point de la circonférence fixe,  $m$  le point correspondant de l'ovale, on voit, d'après la remarque faite plus haut, que *le cercle ayant pour diamètre la distance des points conjugués harmoniques qui divisent le segment  $pp_1$  dans le rapport  $K$  est tangent à l'ovale considéré au point  $m$ .*

Je terminerai cette Note par quelques théorèmes sur la *lemniscate* qui résultent des principes précédents.

L'équation de cette courbe en coordonnées bipolaires est

$$\rho\rho_1 = K.$$

Par suite,

$$F'_\rho = \rho_1, \quad F'_{\rho_1} = \rho$$

et

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega_1} = - \frac{\rho}{\rho_1},$$

d'où l'on conclut facilement que :

*La normale en un point d'une lemniscate est symétrique de la droite qui joint ce point au centre de la courbe par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle formé par les rayons vecteurs du même point*

Il est, de plus, aisé de démontrer que, dans le triangle rectangle, la hauteur et la médiane issues du sommet de l'angle droit sont symétriques par rapport à la bissectrice intérieure issue du même sommet.

On arrive sans difficulté, par la combinaison de cette proposition avec le théorème précédent, au nouveau théorème que voici :

*Les points d'une lemniscate où la tangente est parallèle à l'axe des foyers sont sur une circonférence concentrique à cette courbe et passant par les foyers.*

---

**REMARQUE SUR LE CENTRE DE COMPOSITION D'UN SYSTÈME  
DE FORCES QUELCONQUES DANS LE PLAN;**

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

---

Comme complément à ma Note *Sur la composition des forces dans le plan* <sup>(1)</sup>, je ferai remarquer que le moyen le plus simple de déterminer le *centre de composition* est le suivant.

On construit un polygone funiculaire quelconque ayant ses sommets respectivement sur les diverses forces données. La ligne d'action de la résultante du système passe par le point de rencontre des côtés extrêmes de ce polygone funiculaire et est parallèle à la somme géométrique des forces considérées.

On fait tourner toutes les forces du système du même angle autour de leurs points d'application. On construit, comme précédemment, la nouvelle ligne d'action. Le point de rencontre de ces deux lignes d'action est le centre de composition cherché.

---

**QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE PROPOSÉES  
PAR M. ÉDOUARD LUCAS;**

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XIV, p. 526 );

PAR M. MORET-BLANC.

---

**1.** Si  $(x, y, z)$  représente une solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$(1) \quad Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0,$$


---

(<sup>1</sup>) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 115 (mars 1880).

on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0,$$

$$AXx^2 + BYy^2 + CZz^2 = 0.$$

De ces deux dernières équations on tire

$$\frac{X}{x(Cz^3 - By^3)} = \frac{Y}{y(Ax^3 - Cz^3)} = \frac{Z}{z(By^3 - Ax^3)} = k,$$

$k$  étant un nombre quelconque.

En remplaçant  $X, Y, Z$  par les valeurs déduites de ces relations dans l'équation

$$AX^3 + BY^3 + CZ^3 + 3DXYZ = 0,$$

on obtient l'équation

$$Ax^3(Cz^3 - By^3)^3 + By^3(Ax^3 - Cz^3)^3 + Cz^3(By^3 - Ax^3)^3 \\ + 3Dxyz(Cz^3 - By^3)(Ax^3 - Cz^3)(By^3 - Ax^3) =$$

qui doit être satisfaite en vertu de l'équation (1).

En effet, si l'on élimine  $D$  entre ces deux équations on obtient l'identité

$$(Ax^6 + By^6 + Cz^6 - BCy^3z^3 - ACx^3z^3 - ABx^3y^3) \\ \times [Ax^3(Cz^3 - By^3) + By^3(Ax^3 - Cz^3) + Cz^3(By^3 - Ax^3)] =$$

car le dernier facteur est identiquement nul.

2. Si  $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1)$  désignent deux solutions distinctes de l'équation précédente, on obtient une nouvelle solution à l'aide des équations

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$AXxx_1 + BYyy_1 + CZzz_1 = 0.$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$\begin{aligned} & \frac{X}{C(z^2 x_1 z_1 - z_1^2 x z) + B(y^2 x_1 y_1 - x y y_1^2)} \\ &= \frac{Y}{A(x^2 x_1 y_1 - x_1^2 x y) + C(z^2 y_1 z_1 - z_1^2 y z)} \\ &= \frac{Z}{B(y^2 y_1 z_1 - z_1^2 y z) + A(x^2 x_1 z_1 - x_1^2 x z)} = k. \end{aligned}$$

Si entre les équations

$$A x^3 + B y^3 + C z^3 + 3 D x y z = 0,$$

$$A X^3 + B Y^3 + C Z^3 + 3 D X Y Z = 0,$$

$$A x_1^3 + B y_1^3 + C z_1^3 + 3 D x_1 y_1 z_1 = 0.$$

on élimine D, on a les deux équations

$$\begin{aligned} A (x^3 x_1 y_1 z_1 - x_1^3 x y z) + B (y^3 x_1 y_1 z_1 - y_1^3 x y z) \\ + C (z^3 x_1 y_1 z_1 - z_1^3 x y z) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A (x^3 X Y Z - X^3 x y z) + B (y^3 X Y Z - Y^3 x y z) \\ + C (z^3 X Y Z - Z^3 x y z) = 0. \end{aligned}$$

Si l'on élimine un des coefficients entre ces deux dernières équations, après avoir remplacé dans la dernière X, Y, Z par les valeurs trouvées plus haut, on obtient une identité; donc l'équation

$$A X^3 + B Y^3 + C Z^3 + 3 D X Y Z = 0$$

est une conséquence des autres.

**B.** L'équation biquadratique  $x^4 - 5y^4 = 1$  a pour solution en nombres entiers  $x = 3$ ,  $y = 2$ , et n'en a pas d'autre.

Il est évident que  $y$  doit être pair et  $x$  impair.

Je rappellerai d'abord que tout carré impair est égal à huit fois un nombre triangulaire plus 1. Dans ce qui suit, la lettre  $t$  désignera toujours un nombre triangulaire.

Cela posé, l'équation peut s'écrire

$$(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5y^4.$$

Les deux facteurs  $x^2 + 1$  et  $x^2 - 1$  ayant pour plus grand commun diviseur 2, et  $x^2 + 1$  étant de la forme  $8m + 2$ , il faut que le premier soit le décuple ou le double d'un carré impair, et le second le double ou le décuple d'un carré pair.

1° Soient

$$x^2 + 1 = 10u^2 = 10(8t + 1) = 80t + 10,$$

$$x^2 - 1 = 2v^2 = 2 \cdot 4^n (8t' + 1) = 4^n \cdot 16t' + 2 \cdot 4^n,$$

d'où

$$x^2 = 80t + 9 = 4^n \cdot 16t' + 2 \cdot 4^n + 1.$$

La comparaison de ces valeurs montre que l'on doit avoir  $n = 1$ , d'où

$$x^2 = 80t + 9 = 64t' + 9.$$

$x^2 - 1$  est un multiple de 8 par un nombre impair; les deux facteurs  $x + 1$  et  $x - 1$  seront donc l'un le double, l'autre le quadruple d'un carré impair. Soient

$$x + 1 = 4(8t'' + 1) = 32t'' + 4,$$

$$x - 1 = 2(8t''' + 1) = 16t''' + 2,$$

d'où

$$x = 32t'' + 3 = 16t''' + 3.$$

Il faut qu'on ait  $2t'' = t'''$ , ce qui ne peut avoir lieu comme je l'ai démontré (question 1180), qu'en faisant  $t'' = 0$ ,  $t''' = 0$ , d'où  $x = 3$ ,  $y = 2$ , solution admissible avec  $t = 0$ ,  $t' = 0$ ; ou bien  $t'' = 3$ ,  $t''' = 6$ , d'où  $x = 9$  ce qui donne pour  $t'$  une valeur fractionnaire : cette solution est donc inadmissible.

Si l'on posait

$$x + 1 = 2(8t_1 + 1) = 16t_1 + 2,$$

$$x - 1 = 4(8t_2 + 1) = 32t_2 + 4,$$

il en résulterait

$$x = 16t_1 + 1 = 32t_2 + 5,$$

valeurs incompatibles.

2° Posons maintenant

$$x^2 + 1 = 2(8t + 1) = 16t + 2,$$

$$x^2 - 1 = 10 \cdot 4^n (8t' + 1).$$

De la première équation, on tire

$$x^2 = 16t + 1 = 8t'' + 1,$$

ce qui exige que  $t'' = 2t$ , et, par suite,  $t = 0$ ,  $t'' = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ , solution admissible; ou bien  $t = 3$ ,  $t'' = 6$ , ce qui donne  $x^2 = 49$ , valeur qui ne satisfait pas à la seconde équation.

Les seules solutions en nombres entiers positifs sont donc

$$x = 1, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad x = 3, \quad y = 2.$$

4. *La différence de deux cubes consécutifs n'est jamais égale à un bicarré.*

De l'équation

$$3x^2 + 3x + 1 = z^4$$

on tire

$$x = -\frac{3 \pm \sqrt{3(4z^4 - 1)}}{6}.$$

Il faudrait donc que  $4z^4 - 1$  fût le triple d'un carré, et l'on aurait, en remarquant que  $z^2$  est de la forme  $3m + 1$ ,

$$2z^2 + 1 = 3u^2 = 3(8t + 1) = 24t + 3,$$

$$2z^2 - 1 = v^2 = 8t' + 1,$$

d'où

$$z^2 = 12t + 1 = 4t' + 1 = 8t'' + 1,$$

ce qui exige que l'on ait

$$t' = 0, \quad t'' = 0, \quad t = 0,$$

d'où

$$z = 1, \quad x = 0;$$

$t' = 6$ ,  $t'' = 3$  donnerait  $t = 2$ , inadmissible, puisque 2 n'est pas un nombre triangulaire.

Donc *la différence des cubes de deux nombres entiers consécutifs n'est jamais un bicarré, à moins que l'un d'eux ne soit 0.*

5. *Trouver toutes les solutions en nombres entiers des deux progressions arithmétiques*

$$: x^2.2y^2.3z^2.4u^2,$$

$$: x^2.3y^2.5z^2.7u^2.$$

*On a pour la première*

$$: 167^2.2 \times 97^2.3 \times 57^2.4 \times 13^2,$$

*de raison 9071, et pour la seconde*

$$: 607^2.3 \times 303^2.5 \times 191^2.7 \times 113^2,$$

*de raison 93 022.*

Il suffit de chercher les solutions en nombres premiers entre eux, car si l'on multiplie  $x, y, z, u$  par un même nombre  $m$ , la raison sera multipliée par  $m^2$ .

On reconnaît immédiatement que les quatre carrés doivent être à la fois pairs ou impairs, pour que la raison soit de même forme relativement au diviseur 8, et, comme on veut des nombres premiers entre eux, ils doivent être impairs.

1° On doit avoir

$$x^2 + 3z^2 = 4y^2,$$

$$x^2 + 3z^2 = (x + z\sqrt{-3})(x - z\sqrt{-3}),$$

et, comme  $x$  et  $z$  doivent être premiers entre eux, chaque



facteur doit être un carré. Soit donc

$$x + z\sqrt{-3} = (p + q\sqrt{-3})^2,$$

d'où

$$x - z\sqrt{-3} = (p - q\sqrt{-3})^2,$$

et

$$x^2 + 3z^2 = (p^2 + 3q^2)^2.$$

On en tire

$$x = p^2 - 3q^2,$$

$$z = 2pq,$$

$$y = p^2 + 3q^2.$$

Comme les nombres  $x, y, z$  doivent être impairs, on peut poser

$$p = m\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$x = \frac{m^2 - 3n^2}{2}, \quad y = \frac{m^2 + 3n^2}{4}, \quad z = mn.$$

On peut encore poser

$$p = m\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{6}},$$

d'où

$$x = \frac{3m^2 - n^2}{2}, \quad y = \frac{3m^2 + n^2}{4}, \quad z = mn;$$

mais, comme le signe de  $x$  est arbitraire, les nouvelles formules rentrent dans les premières.

On a ensuite

$$4u^2 = 6z^2 - 2y^2 = \frac{84m^2n^2 - 2m^4 - 18n^4}{16}.$$

Il faut donc que  $84m^2n^2 - 2m^4 - 18n^4$  soit un carré parfait, ou, en posant  $\frac{m}{n} = v$ ,  $84v^2 - 2v^4 - 18$  doit être un carré rationnel.

Soient  $h$  une solution,  $k^2$  le résultat de sa substitution dans le trinôme; posons  $v = h + r$ :

$$84v^2 - 2v^4 - 18 = k^2 + (168h - 8h^3)r + (84 - 7h^2)r^2 - 8hr^3 - 2r^4 =$$

Or l'équation  $84v^2 - 2v^4 - 18 = t^2$  est satisfaite pour  $v = 1$ ,  $t = 8$ , d'où  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $x = y = z = u$ :

Faisons  $h = 1$ ,  $k = 8$ , et posons

$$\begin{aligned} 64 + 160r + 72r^2 - 8r^3 - 2r^4 \\ = (8 + ar + b)^2 \\ = 64 + 16ar + (a^2 + 16b)r^2 + 2abr^3 + b^2r^4 \end{aligned}$$

Identifiant les premiers termes, on a

$$a = 10, \quad b = -\frac{7}{4},$$

d'où

$$\begin{aligned} r = \frac{16}{3}, \quad v = \frac{19}{3}, \quad m = 19, \quad n = 3, \\ x = 167, \quad y = 97, \quad z = 57, \quad u = 13. \end{aligned}$$

Faisons maintenant  $h = \frac{19}{3}$ , d'où  $k = \frac{104}{9}$ , et l'on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{104}{9}\right)^2 - \frac{26144}{27}r - \frac{3576}{9}r^2 - \frac{152}{3}r^3 - 2r^4 \\ = \left(\frac{104}{9} + ar + br^2\right)^2 \\ = \left(\frac{104}{9}\right)^2 + \frac{208}{9}ar + \left(a^2 + \frac{208}{9}b\right)r^2 + 2abr^3 + \end{aligned}$$

En identifiant les premiers termes, on a

$$a = -\frac{1634}{3 \times 13}, \quad b = -\frac{818575}{4 \times 13^3},$$

puis

$$r = - \frac{307.781 \times 13^2 \times 16}{919.368297},$$

$$r = \frac{19}{3} - \frac{307781 \times 13^2 \times 16}{919368297} = \frac{4990426057}{919368297},$$

$$m = 4990\,426\,057, \quad n = 919\,368\,297,$$

$$x = 11\,184\,319\,016\,899\,263\,311,$$

$$y = 6\,860\,016\,606\,742\,651\,969,$$

$$z = 4\,588\,039\,505\,328\,514\,929,$$

$$u = 2\,836\,414\,255\,938\,331\,991 \left[ u = \frac{1}{8} \left( \frac{104}{9} + ar + br^2 \right) \right].$$

**P**artant de ces valeurs, on en trouvera d'autres par la même méthode, et ainsi de suite; mais les nombres croissent rapidement et les calculs deviennent très longs.

2° Considérons la progression :  $x^2.3y^2.5z^2.7u^2$ .

On a

$$x^2 + 5z^2 = 6y^2$$

ou

$$6y^2 - 5z^2 = x^2,$$

qu'on peut écrire

$$(6y - 5z)^2 - 30(y - z)^2 = x^2$$

ou

$$[6y - 5z + (y - z)\sqrt{30}][6y - 5z - (y - z)\sqrt{30}] = x^2.$$

**L**es deux facteurs devant être premiers entre eux, et par conséquent carrés, posons

$$6y - 5z + (y - z)\sqrt{30} = (p + q\sqrt{30})^2,$$

d'où

$$6y - 5z - (y - z)\sqrt{30} = (p - q\sqrt{30})^2$$

et

$$(6y - 5z)^2 - 30(y - z)^2 = (p^2 - 30q^2)^2.$$

De la première équation l'on tire

$$6y - 5z = p^2 + 30q^2, \quad y - z = 2pq,$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} x = p^2 - 30q^2, \\ y = p^2 + 30q^2 - 10pq, \\ z = p^2 + 30q^2 - 12pq. \end{cases}$$

Il n'est pas nécessaire que  $p$  et  $q$  soient entiers pour que  $x$ ,  $y$  et  $z$  le soient. On peut poser

$$p = m\sqrt{2}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(2) \quad \begin{cases} x = 2m^2 - 15n^2, \\ y = 2m^2 + 15n^2 - 10mn \\ z = 2m^2 + 15n^2 - 12mn; \end{cases}$$

ou

$$p = m\sqrt{3}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{3}},$$

d'où

$$(3) \quad \begin{cases} x = 3m^2 - 10n^2, \\ y = 3m^2 + 10n^2 - 10mn, \\ z = 3m^2 + 10n^2 - 12mn; \end{cases}$$

ou

$$p = m\sqrt{5}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{5}},$$

d'où

$$(4) \quad \begin{cases} x = 5m^2 - 6n^2, \\ y = 5m^2 + 6n^2 - 10mn, \\ z = 5m^2 + 6n^2 - 12mn. \end{cases}$$

On pourrait poser encore

$$p = m\sqrt{15}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \dots;$$

mais les nouvelles formules rentrent dans les premières, les signes de  $x, y, z$  étant arbitraires.

Il faut maintenant faire entrer  $7u^2$  dans la progression. On a, en employant les formules (1),

$$\begin{aligned} 7u^2 &= 10z^2 - 3y^2 \\ &= 7p^4 - 180p^3q + 1560p^2q^2 - 5400pq^3 + 6300q^4, \end{aligned}$$

ou, en divisant par  $7q^4$  et posant  $\frac{p}{q} = v$ ,

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{q^4} &= v^4 - \frac{180}{7}v^3 + \frac{1560}{7}v^2 - \frac{5400}{7}v + 900 \\ &= (v^2 + av + 30)^2 = v^4 + 2av^3 + (a^2 + 60)v^2 + 60av + 900, \end{aligned}$$

d'où  $v = 0$ , en faisant  $a = -\frac{90}{7}$ , d'où

$$x = y = z = u = 1,$$

solution évidente *a priori*.

Posons encore

$$\begin{aligned} v^4 - \frac{180}{7}v^3 + \frac{1560}{7}v^2 - \frac{5400}{7}v + 900 \\ = (v^2 + av + b)^2 = v^4 + 2av^3 + (a^2 + 2b)v^2 + 2abv + b^2, \end{aligned}$$

d'où, en identifiant les premiers termes,

$$a = -\frac{90}{7}, \quad b = \frac{1410}{49},$$

puis

$$v = \frac{16}{7}, \quad p = 16, \quad q = 7,$$

$$x = 1214, \quad y = 606, \quad z = 382, \quad u = 226,$$

ou, en divisant par 2,

$$x = 607, \quad y = 303, \quad z = 191, \quad u = 113.$$

En posant

$$v^4 - \frac{180}{7} v^3 + \frac{1560}{7} v^2 - \frac{5400}{7} v + 900 = (av^2 + bv + 30)^2$$

et identifiant les derniers termes, on trouve

$$p = 105, \quad q = 8,$$

d'où

$$x = 9105, \quad y = 4545, \quad z = 2865, \quad u = 1695,$$

ou, en divisant par 15,

$$x = 607, \quad y = 303, \quad z = 191, \quad u = 113.$$

Les autres formes donnent de même des équimultiples des nombres 607, 303, 191, 113.

Mais, au moyen de cette solution, en opérant comme dans la progression précédente, on en trouvera une deuxième, celle-ci en fera trouver une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

6. *Trouver toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles la somme des cinquièmes puissances des  $x$  premiers nombres est un carré parfait.*

En appelant  $S_5$  cette somme, on a

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{x^2(x+1)^2[(2x+1)^2-3]}{24} \\ &= \left[ \frac{x(x+1)}{2} \right]^2 \left[ \frac{(2x+1)^2-3}{6} \right]. \end{aligned}$$

Pour que  $S_5$  soit un carré parfait, il faut et il suffit que  $\frac{(2x+1)^2-3}{6}$  soit un carré parfait, ce qui exige d'abord que  $2x+1$  soit un multiple de 3.

Posons donc  $2x + 1 = 3u$ ; il faut qu'on ait

$$\frac{3u^2 - 1}{2} = v^2 \quad \text{ou} \quad 3u^2 - 2v^2 = 1,$$

équation qu'on peut écrire

$$(3u - 2v)^2 - 6(v - u)^2 = 1.$$

Les solutions de cette équation sont données par les réduites de rang impair dans le développement de  $\sqrt{6}$  en fraction continue; ce sont

$$3u - 2v = 1, 5, 49, 485, 4801, 47525, 470449, 4656965, \dots,$$

$$v - u = 0, 2, 20, 198, 1960, 19042, 192060, 1901198, \dots,$$

d'où

$$u = 1, 9, 89, 881, 8721, 86329, 854569, 8459361, \dots,$$

$$v = 1, 11, 109, 1079, 10681, 105371, 1046629, 10360559, \dots,$$

$$x = 1, 13, 133, 1321, 13081, 129493, 1281853, 12689041, \dots$$

Si l'on appelle  $x_n$  le terme général de cette dernière suite, on a

$$x_n = 10x_{n-1} - x_{n-2} + 4,$$

$$v_n = 10v_{n-1} - v_{n-2}.$$

*Note.* — Reste à résoudre le n° 7.

## SUR UN PROCÉDÉ PARTICULIER DE DIVISION RAPIDE;

PAR M. C. HENRY.

Si l'on divise l'unité par 9 et par une suite de nombres se terminant par 9, on aperçoit entre les différentes fractions décimales consécutives une suite de relations dont la loi est évidente et d'où il ressort un procédé de division rapide.





le cas de  $\frac{1}{99}$ , le  $\frac{1}{10}$  du chiffre antérieur; dans le cas de  $\frac{1}{109}$ , le  $\frac{1}{11}$ ; dans le cas de  $\frac{1}{119}$ , le  $\frac{1}{12}$ ; etc.; dans le cas de  $\frac{1}{199}$ , le  $\frac{1}{20}$ ; dans le cas de  $\frac{1}{209}$ , le  $\frac{1}{21}$ ; etc.; dans le cas de  $\frac{1}{999}$ , le  $\frac{1}{100}$  du chiffre précédent; etc., etc.

Lorsque la fraction exprimant le rapport des deux nombres décimaux consécutifs du quotient a pour dénominateur un multiple de 10, comme dans le cas de  $\frac{1}{199}$  la fraction  $\frac{1}{20}$ , dans le cas de  $\frac{1}{299}$  la fraction  $\frac{1}{30}$ , dans le cas de  $\frac{1}{1999}$  la fraction  $\frac{1}{200}$ , il suffit évidemment de diviser par  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ , ... des tranches de 2, 3, ... chiffres.

Lorsque le dividende est plus grand que le diviseur, il est clair qu'il faut calculer d'abord la partie entière du quotient et le premier chiffre décimal, puis appliquer à ce premier nombre la fraction convenable.

Pour la raison de ce procédé, nous renverrons à un *Mémoire de Cauchy intitulé Sur les moyens de vérifier ou de simplifier les diverses opérations de l'Arithmétique décimale (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XI, p. 853; 1841)*. Dans ce travail, Cauchy fonde une règle de transformation rapide des fractions ordinaires en périodiques sur la remarque suivante : *On double à très peu près le nombre des chiffres décimaux que renferme une valeur très approchée du quotient fourni par une division arithmétique, quand, pour augmenter le degré d'approximation, l'on ajoute à cette valeur approchée le premier terme de la progression arithmétique qui représente le quotient développé suivant les puissances ascendantes du reste.*

**CONDITION D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE HOMOGÈNE,  
AYANT LA FORME D'UN ELLIPSOÏDE A TROIS AXES INÉGAUX  
ET ANIMÉE D'UN MOUVEMENT UNIFORME DE ROTATION  
AUTOUR DE L'UN DE CES AXES;**

PAR M. A. PICART.

Jacobi a reconnu le premier qu'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe fixe et dont les molécules s'attirent l'une l'autre en raison inverse du carré des distances, peut se maintenir d'elle-même en équilibre sous la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. Il suffit que les trois demi-axes  $A, B, C$  et la vitesse angulaire constante  $\omega$ , avec laquelle le fluide tourne autour de l'axe  $A$ , satisfassent aux deux équations de condition

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{B^2}\right) \left(1 + \frac{x}{C^2}\right) D} = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{A^2}\right) D},$$

$$\omega^2 = \frac{2\pi\rho}{B^2 C^2} \int_0^\infty \frac{x dx}{\left(1 + \frac{x}{B^2}\right) \left(1 + \frac{x}{C^2}\right) D},$$

dans lesquelles  $\rho$  représente la densité du fluide et  $D$  l'expression

$$\sqrt{\left(1 + \frac{x}{A^2}\right) \left(1 + \frac{x}{B^2}\right) \left(1 + \frac{x}{C^2}\right)}.$$

M. Liouville a démontré ces formules, dans le XXIII<sup>e</sup> Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, par une méthode analogue à celle qu'avait suivie Laplace

pour reconnaître que la forme d'un ellipsoïde de révolution convient à l'équilibre d'une masse fluide homogène.

Je suis arrivé au même résultat par une voie peut-être plus élémentaire et qui a l'avantage de mettre en évidence, sous une forme très nette, la loi suivant laquelle varie la pesanteur sur la surface.

Les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène à trois axes inégaux sur un point de sa surface sont

$$X = 4\pi\rho x \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = 4\pi\rho y \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{3}{2}}(1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z = 4\pi\rho z \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \mu u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$\lambda$  et  $\mu$  représentant les quantités  $\frac{B^2}{A^2} - 1$ ,  $\frac{C^2}{A^2} - 1$ .

On peut écrire

$$X = Mx, \quad Y = Ny, \quad Z = Pz,$$

en posant

$$M = 4\pi\rho \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$N = 4\pi\rho \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{3}{2}}(1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$P = 4\pi\rho \frac{BC}{A^2} \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \mu u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exprimons la condition pour que l'attraction soit la résultante de deux forces dirigées, l'une,  $G$ , suivant la normale à la surface, l'autre,  $H$ , suivant la perpendicu-

laire abaissée sur l'axe A :

$$(1) \quad Mx = G \frac{x}{A^2 \sqrt{\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4}}},$$

$$(2) \quad Ny = G \frac{y}{B^2 \sqrt{\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4}}} + H \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

$$(3) \quad Pz = G \frac{z}{C^2 \sqrt{\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4}}} + H \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

ou

$$(1') \quad M = \frac{Gp}{A^2},$$

$$(2') \quad N = \frac{Gp}{B^2} + \frac{H}{r},$$

$$(3') \quad P = \frac{Gp}{C^2} + \frac{H}{r},$$

$r$  étant la distance du point attiré à l'axe A, et  $p$  la distance du centre de la surface au plan tangent en ce point; d'où

$$(a) \quad N - \frac{MA^2}{B^2} = P - \frac{MA^2}{C^2},$$

auquel cas

$$(b) \quad G = \frac{MA^2}{p},$$

$$(c) \quad H = \left( N - \frac{MA^2}{B^2} \right) r.$$

La composante normale est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent.

La composante perpendiculaire à l'axe est proportionnelle à la distance du point à l'axe.

Il résulte de là que si une masse fluide homogène

de forme ellipsoïdale dont les axes satisfont à la relation (a) tourne autour de l'axe A avec une vitesse angulaire  $\omega = \sqrt{N - \frac{MA^2}{B^2}}$ , elle se maintient d'elle-même en équilibre, puisque la composante H est détruite par la force centrifuge, et qu'il ne reste que la composante G, normale à la surface.

La formule (b) exprime la loi suivant laquelle varie la pesanteur sur la surface de cet ellipsoïde :

*La pesanteur en chaque point de la surface est en raison inverse de la distance du centre au plan tangent en ce point.*

L'équation de condition (a) se transforme aisément dans la formule suivante

$$\begin{aligned} & \frac{B^2 C^2}{A^4} \int_0^1 \frac{u^4 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \mu u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1 + \lambda u^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu u^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

En remplaçant  $\lambda$  et  $\mu$  par leurs valeurs et en posant  $\frac{A^2(1 - u^2)}{u^2} = x$ , on obtient finalement l'équation de Jacobi, savoir

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{B^2}\right) \left(1 + \frac{x}{C^2}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{x}{A^2}\right) \left(1 + \frac{x}{B^2}\right) \left(1 + \frac{x}{C^2}\right)}} \\ & \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{A^2}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{x}{A^2}\right) \left(1 + \frac{x}{B^2}\right) \left(1 + \frac{x}{C^2}\right)}}. \end{aligned}$$

La vitesse angulaire de rotation  $\omega$  est donnée par la

De la première équation l'on tire

$$6y - 5z = p^2 + 30q^2, \quad y - z = 2pq,$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} x = p^2 - 30q^2, \\ y = p^2 + 30q^2 - 10pq, \\ z = p^2 + 30q^2 - 12pq. \end{cases}$$

Il n'est pas nécessaire que  $p$  et  $q$  soient entiers pour que  $x, y$  et  $z$  le soient. On peut poser

$$p = m\sqrt{2}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$(2) \quad \begin{cases} x = 2m^2 - 15n^2, \\ y = 2m^2 + 15n^2 - 10mn \\ z = 2m^2 + 15n^2 - 12mn; \end{cases}$$

ou

$$p = m\sqrt{3}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{3}},$$

d'où

$$(3) \quad \begin{cases} x = 3m^2 - 10n^2, \\ y = 3m^2 + 10n^2 - 10mn, \\ z = 3m^2 + 10n^2 - 12mn; \end{cases}$$

ou

$$p = m\sqrt{5}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{5}},$$

d'où

$$(4) \quad \begin{cases} x = 5m^2 - 6n^2, \\ y = 5m^2 + 6n^2 - 10mn, \\ z = 5m^2 + 6n^2 - 12mn. \end{cases}$$

On pourrait poser encore

$$p = m\sqrt{15}, \quad q = n\sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \dots;$$

pour le pôle  $y_1, y_2$  et pour les valeurs du rapport  $x_1 : x_2$ , pour lesquels la forme  $f$  se réduit à zéro.

Le covariant quadratique H (hessien) et le covariant cubique Q (jacobien de la forme  $f$  et du hessien H) de la forme  $f$  sont

$$H = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2,$$

$$Q = c_0 x_1^3 + 3 c_1 x_1^2 x_2 + 3 c_2 x_1 x_2^2 + c_3 x_2^3,$$

si

$$c_0 = a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3,$$

$$c_1 = a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2,$$

$$c_2 = - (a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2),$$

$$c_3 = - (a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3).$$

Le discriminant de la forme  $f$  est

$$\Delta = (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4 (a_0 a_2 - a_1^2) (a_1 a_3 - a_2^2).$$

En désignant les racines négatives de l'équation

$$H = 0$$

par  $r_0$  et  $r_1$ , ainsi que

$$r_0 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 + \sqrt{\Delta}}{2 (a_0 a_2 - a_1^2)},$$

$$r_1 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 - \sqrt{\Delta}}{2 (a_0 a_2 - a_1^2)},$$

il aura les relations suivantes :

$$c_0 + a_0 \sqrt{\Delta} = c_0 + a_0 \sqrt{\Delta},$$

$$(c_0 + a_0 \sqrt{\Delta}) r_1 = c_1 + a_1 \sqrt{\Delta},$$

$$(c_0 + a_0 \sqrt{\Delta}) r_1^2 = c_2 + a_2 \sqrt{\Delta},$$

$$(c_0 + a_0 \sqrt{\Delta}) r_1^3 = c_3 + a_3 \sqrt{\Delta}.$$

et

$$\begin{aligned} c_0 - a_0 \sqrt{\Delta} &= c_0 - a_0 \sqrt{\Delta}, \\ (c_0 - a_0 \sqrt{\Delta}) r_0 &= c_1 - a_1 \sqrt{\Delta}, \\ (c_0 - a_0 \sqrt{\Delta}) r_0^2 &= c_2 - a_2 \sqrt{\Delta}, \\ (c_0 - a_0 \sqrt{\Delta}) r_0^3 &= c_3 - a_3 \sqrt{\Delta}. \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres des équations précédentes successivement par  $x_1^3$ ,  $3x_1^2x_2$ ,  $3x_1x_2^2$ ,  $x_2^3$  et faisons les sommes; nous obtiendrons

$$(1) \quad \begin{cases} (c_0 + a_0 \sqrt{\Delta})(x_1 + r_1 x_2)^3 = Q + f \sqrt{\Delta}, \\ (c_0 - a_0 \sqrt{\Delta})(x_1 - r_0 x_2)^3 = Q - f \sqrt{\Delta}. \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que

$$Q + f \sqrt{\Delta}, \quad Q - f \sqrt{\Delta}$$

sont des cubes complets d'expressions linéaires, résultat qui est déjà connu. Notre développement nous fournissait aussi les expressions linéaires. Des équations (1) on tire

$$(2) \quad f \sqrt{\Delta} = \mu_1^3 (x_1 + r_1 x_2)^3 - \mu_0^3 (x_1 - r_0 x_2)^3,$$

où

$$(3) \quad \begin{cases} \mu_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} c_0 - \frac{1}{2} a_0 \sqrt{\Delta}}, \\ \mu_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} a_0 \sqrt{\Delta}}, \end{cases}$$

et où l'on prend pour toutes les deux racines cubiques les valeurs réelles.

On obtient les valeurs du rapport  $x_1 : x_2$ , pour lesquelles la forme  $f$  se réduit à zéro en vertu de l'équation (2) (en supposant que le discriminant  $\Delta$  est différent de zéro), de la relation suivante

$$(4) \quad \mu_1 (x_1 + r_1 x_2) = \varepsilon^v \mu_0 (x_1 - r_0 x_2),$$



où  $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$  et où l'on met pour  $\nu$  successivement les valeurs 0, 1, 2.

De l'équation (2) on tire, pour la deuxième polaire de la forme  $f$ , c'est-à-dire pour

$$P = (a_0 y_1^2 + 2a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2)x_1 \\ + (a_1 y_1^2 + 2a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2)x_2,$$

la valeur

$$P\sqrt{\Delta} = \mu_1^3(y_1 + r_1 y_2)^2(x_1 + r_1 x_2) \\ - \mu_0^3(y_1 + r_0 y_2)^2(x_1 + r_0 x_2)$$

ou

$$P\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} \mu_0(x_1 + r_0 x_2) & \mu_0^2(y_1 + r_0 y_2)^2 \\ \mu_1(x_1 + r_1 x_2) & \mu_1^2(y_1 + r_1 y_2)^2 \end{vmatrix},$$

et puisque, selon l'équation (2),

$$(5) \quad \begin{cases} \mu_1(x_1 + r_1 x_2) = \varepsilon^\nu \mu_0(x_1 + r_0 x_2), \\ \mu_0(x_1 + r_0 x_2) = \varepsilon^{2\nu} \mu_1(x_1 + r_1 x_2), \end{cases}$$

on peut aussi écrire

$$(6) \quad P\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} \varepsilon^\nu \mu_0(x_1 + r_0 x_2) & \mu_0^2(y_1 + r_0 y_2)^2 \\ \varepsilon^{2\nu} \mu_1(x_1 + r_1 x_2) & \mu_1^2(y_1 + r_1 y_2)^2 \end{vmatrix}.$$

Parce que

$$\mu_0 \mu_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(c_0^2 - a_0^2 \Delta)} = -(a_0 a_2 - a_1^2)$$

et

$$(a_0 a_2 - a_1^2)(r_0 - r_1) = \sqrt{\Delta},$$

on obtient encore les équations suivantes

$$\begin{vmatrix} \mu_0(x_1 + r_0 x_2) & \mu_0(y_1 + r_0 y_2) \\ \mu_1(x_1 + r_1 x_2) & \mu_1(y_1 + r_1 y_2) \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \sqrt{\Delta}, \\ \begin{vmatrix} \mu_0(y_1 + r_0 y_2) & \mu_0(x_1 + r_0 x_2) \\ \mu_1(y_1 + r_1 y_2) & \mu_1(x_1 + r_1 x_2) \end{vmatrix} = -(x_1 y_2 - x_2 y_1) \sqrt{\Delta}.$$

En multipliant les deux membres de la première équation par  $\varepsilon^v \mu_1(y_1 + r_1 y_2)$  et les deux membres de la seconde par  $\varepsilon^{2v} \mu_0(y_1 + r_0 y_2)$ , et faisant la différence, on peut obtenir la différence sous la forme

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} \varepsilon^v \mu_0(x_1 + r_0 x_2) & \mu_0^2(y_1 + r_0 y_2)^2 \\ \varepsilon^{2v} \mu_1(x_1 + r_1 x_2) & \mu_1^2(y_1 + r_1 y_2)^2 \end{array} \right| \\ + \left| \begin{array}{cc} \varepsilon^{2v} \mu_0(x_1 + r_0 x_2) & \mu_0 \mu_1(y_1 + r_0 y_2)(y_1 + r_1 y_2) \\ \varepsilon^v \mu_1(x_1 + r_1 x_2) & \mu_0 \mu_1(y_1 + r_0 y_2)(y_1 + r_1 y_2) \end{array} \right| \\ = (x_1 y_2 - x_2 y_1) [\varepsilon^v \mu_1(y_1 + r_1 y_2) + \varepsilon^{2v} \mu_0(y_1 + r_0 y_2)] \sqrt{\Delta}. \end{array} \right.$$

Le premier déterminant du côté gauche est, selon l'équation (6), identique à  $P \sqrt{\Delta}$ . Le second déterminant s'évanouit, puisque, en vertu de l'équation (5), les éléments de la première colonne sont aussi égaux. Selon les équations (1) et (3), on a encore

$$\mu_1(y_1 + r_1 y_2) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} Q' + \frac{1}{2} f' \sqrt{\Delta}},$$

$$\mu_0(y_1 + r_0 y_2) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} Q' - \frac{1}{2} f' \sqrt{\Delta}},$$

si  $Q'$  et  $f'$  signifient les formes  $Q$  et  $f$ , en y remplaçant les arguments  $x_1, x_2$  par  $y_1, y_2$ , c'est-à-dire si

$$f' = a_0 y_1^3 + 3 a_1 y_1^2 y_2 + 3 a_2 y_1 y_2^2 + a_3 y_2^3,$$

$$Q' = c_0 y_1^3 + 3 c_1 y_1^2 y_2 + 3 c_2 y_1 y_2^2 + c_3 y_2^3.$$

Ainsi l'équation (7) revient à

$$\begin{aligned} & (a_0 y_1^2 + 2 a_1 y_1 y_2 + a_2 y_2^2) x_1 + (a_1 y_1^2 + 2 a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2) x_2 \\ & = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \left( \varepsilon^v \sqrt[3]{\frac{1}{2} Q' + \frac{1}{2} f' \sqrt{\Delta}} + \varepsilon^{2v} \sqrt[3]{\frac{1}{2} Q' - \frac{1}{2} f' \sqrt{\Delta}} \right). \end{aligned}$$

En y substituant des valeurs spéciales convenablement choisies du pôle  $y_1, y_2$ , on obtient, de cette équation, les formes connues pour la résolution de l'équation du troisième degré

$$a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 = 0.$$

# RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. F. BRIOT,

Capitaine d'infanterie de marine, à Cherbourg.

Étant donnée l'équation générale du quatrième degré, on peut toujours, par une transformation facile à effectuer, la ramener à la forme

$$(1) \quad x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

et faire dépendre la variable de trois inconnues auxiliaires  $v, y, z$ , en posant

$$x = v + y + z,$$

ce qui donne

$$(v + y + z)^4 + A(v + y + z)^2 + B(v + y + z) + C = 0$$

et successivement

$$(v^2 + y^2 + z^2 + 2vy + 2vz + 2yz)^2 + A(v^2 + y^2 + z^2 + 2vy + 2vz + 2yz)^2 + B(v + y + z) + C = 0,$$

$$(v^2 + y^2 + z^2)^2 + 4(v^2 + y^2 + z^2)(vy + vz + yz) + 4(v^2z^2 + v^2y^2 + y^2z^2) + 8vyz(v + y + z) + A(v^2 + y^2 + z^2) + 2A(vy + vz + yz) + B(v + y + z) + C = 0,$$

$$(v^2 + y^2 + z^2)^2 + [2(v^2 + y^2 + z^2) + A](2vy + 2vz + 2yz) + A(v^2 + y^2 + z^2) + (8vyz + B)(v + y + z) + 4(v^2y^2 + v^2z^2 + y^2z^2) + C = 0.$$

En établissant, ce qui est toujours possible, entre  $v, y$  et  $z$  les relations suivantes

$$v^2 + y^2 + z^2 = -\frac{A}{2}, \quad vyz = -\frac{B}{8},$$

et en remarquant que les deuxième et quatrième termes de la dernière égalité disparaissent, on obtient

$$v^2 y^2 + v^2 z^2 + y^2 z^2 = \frac{A^2}{16} - \frac{C}{4}.$$

Dès lors,  $v^2$ ,  $y^2$  et  $z^2$  sont les racines de l'équation cubique

$$(2) \quad X^3 + \frac{A}{2} X^2 + \left( \frac{A^2}{16} - \frac{C}{4} \right) X - \frac{B^2}{64} = 0.$$

Par conséquent,  $v$ ,  $y$ ,  $z$  peuvent être déterminés, et, en combinant convenablement leurs six valeurs, on obtient huit quantités égales deux à deux et de signes contraires; mais l'équation proposée, contenant une puissance impaire de l'inconnue, ne peut admettre pour racines que quatre d'entre elles ayant des valeurs absolues différentes.

L'existence de ces huit quantités s'explique facilement en considérant que le changement de signe du coefficient  $B$  entraîne nécessairement celui des quatre racines considérées, sans modifier celles qui servent à les déterminer.

Il est facile de s'assurer que l'équation (1) admettra quatre racines réelles, ou deux racines réelles et deux imaginaires, ou bien quatre racines imaginaires, lorsque l'équation (2) aura trois racines positives ou deux racines imaginaires et une positive, ou bien des groupes de racines différents des précédents.

Lorsque  $B = 0$ , les valeurs de  $x$  sont données par la formule

$$x = \pm \sqrt{-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - C}};$$

elles le sont également par la suivante

$$x = \pm \sqrt{-\frac{A}{4} + \sqrt{\frac{C}{4}}} \pm \sqrt{-\frac{A}{4} - \sqrt{\frac{C}{4}}},$$

et l'identité de ces deux expressions se vérifie facilement en les élevant au carré.

## SUR LA RÉOLUTION D'UN SYSTÈME PARTICULIER DE DEUX ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU DEGRÉ $m$ A DEUX INCONNUES;

PAR M. ESCARY.

Le système des deux équations simultanées du degré  $m$ ,

$$(1) \quad ax^m + by^m = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{y^m} = c,$$

se résout d'une manière très élégante en introduisant, comme l'a fait M. Lannes dans la question du Concours général de 1879 (1), les angles du triangle construit avec les coefficients  $a, b, c$  comme côtés, en supposant cette construction possible. En effet, en rendant ces équations homogènes, elles s'écrivent

$$(2) \quad \begin{cases} ax^m + by^m = cz^m, \\ \frac{a}{x^m} + \frac{b}{y^m} = \frac{c}{z^m}. \end{cases}$$

Si l'on pose  $\frac{y}{z} = \alpha$ ,  $\frac{z}{x} = \beta$ ,  $\frac{x}{y} = \gamma$ , et qu'on multiplie les équations (2) membre à membre, on a, en rendant le résultat entier,

$$ab\gamma^{2m} + (a^2 + b^2 - c^2)\gamma^m + ab = 0,$$

(1) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 508.

d'où l'on tire

$$\gamma^m = \frac{c^2 - a^2 - b^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2}}{2ab}.$$

Or, si l'on désigne par  $S$  la surface du triangle dont les côtés sont  $a, b, c$ , on voit que le radical a pour valeur  $4S\sqrt{-1}$ . En observant encore que l'on a

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \\ 2S &= ab \sin C, \end{aligned}$$

on a enfin

$$\gamma^m = -\cos C \pm \sqrt{-1} \sin C,$$

d'où

$$\gamma = \cos \frac{C + (2K + 1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{C + (2K + 1)\pi}{m},$$

où l'on doit attribuer à  $K$  les valeurs  $0, 1, 2, \dots, m-1$ .

On trouve de la même manière

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \frac{A + 2K\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{A + 2K\pi}{m}, \\ \beta &= \cos \frac{B + 2K\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{B + 2K\pi}{m}. \end{aligned}$$

Si maintenant l'on fait, dans les équations (2),  $z = 1$ , on retombe dans les équations (1), et des valeurs précédentes de  $\alpha$  et de  $\beta$  on tire celles de  $x$  et de  $y$ , savoir

$$\begin{aligned} x &= \cos \frac{B + 2K\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{B + 2K\pi}{m}, \\ y &= \cos \frac{A + 2K\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{A + 2K\pi}{m}. \end{aligned}$$

Ce sont les  $2m$  systèmes de solutions des équations proposées (1).

Il nous a paru intéressant de présenter ici cette résolution du système des équations (1), à cause de l'analyse que l'on observe, grâce à la représentation géométrique

de M. Lannes, entre ses solutions et celles des équations trinômes, dans le cas des racines imaginaires, car on sait que ces dernières racines conduisent alors, en les interprétant géométriquement, à l'élégant théorème de Cotes.

---

## SOLUTION D'UNE QUESTION DE LICENCE

(FACULTÉ DE LILLE. — NOVEMBRE 1878);

PAR M. ÉVESQUE,

Élève de la Faculté des Sciences de Montpellier.

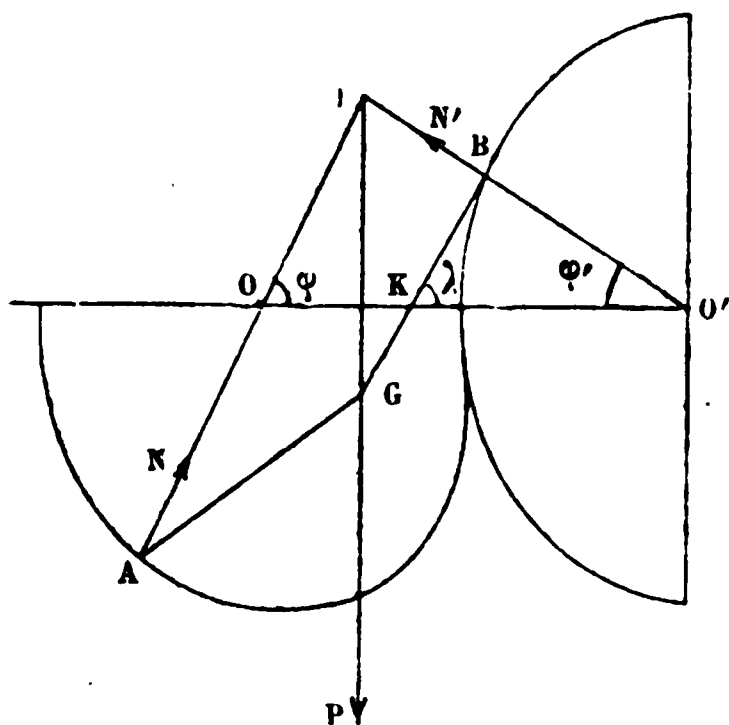
---

*Une surface de révolution autour de l'axe des  $z$  est définie par l'équation  $z = f(r)$  : trouver l'équation différentielle en coordonnées polaires des projections sur le plan des  $xy$  des courbes tracées sur cette surface et qui jouissent de la propriété que le plan osculateur en chaque point de l'une d'elles comprenne la normale à la surface en ce point.*

Il résulte de l'énoncé même du problème que le plan osculateur en un point quelconque de l'une des courbes en question doit être normal à la surface, ce qui est la propriété caractéristique des lignes géodésiques; la normale à la surface aura donc la même direction que la normale principale; or celle-ci fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à  $d\frac{dx}{ds}$ ,  $d\frac{dy}{ds}$ ,  $d\frac{dz}{ds}$ ; d'un autre côté, la normale à la surface fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à  $\frac{dF}{dx}$ ,  $\frac{dF}{dy}$ ,  $\frac{dF}{dz}$ .

Or, l'équation de la surface proposée étant, en coor-

Soient  $N$  et  $N'$  les réactions qui s'exercent en  $A$  et  $B$ , et soit  $P$  le poids de la tige, appliqué en son milieu  $G$ . Il faut, pour l'équilibre, que ces trois forces soient dans un même plan et concourent en un point  $I$ . Ce plan doit



être vertical, puisqu'il contient  $GP$  qui est vertical; de plus, comme les forces  $N$  et  $N'$  doivent être normales aux deux sphères (le frottement étant négligé), elles doivent passer par les centres  $O$  et  $O'$ . Le plan des trois forces est donc un plan méridien vertical; nous supposons que ce soit le plan de la figure.

1° Désignons par  $R$  le rayon des deux sphères,  $l$  la longueur de la tige,  $\varphi$ ,  $\varphi'$  et  $\lambda$  les angles  $IOO'$ ,  $IO'O$  et l'angle que fait la tige avec  $OO'$ . Écrivons que la projection de  $AB$  sur une droite perpendiculaire à  $OO'$  est égale à la somme des projections des deux rayons  $AO$ ,  $BO'$  sur la même droite, et que  $OO'$  est égale à la somme algébrique des projections sur  $OO'$  des trois droites  $AO$ ,  $AB$ ,  $BO'$ ; nous aurons les équations

$$\begin{aligned} l \sin \lambda &= R \sin \varphi + R \sin \varphi', \\ 2R &= l \cos \lambda - R \cos \varphi + R \cos \varphi', \end{aligned}$$



ou, en posant  $\frac{l}{R} = K$ ,

$$(1) \quad \sin \varphi + \sin \varphi' = K \sin \lambda,$$

$$(2) \quad \cos \varphi' - \cos \varphi = 2 - K \cos \lambda.$$

D'autre part, la droite IG étant une médiane du triangle AIB, on a, d'après une formule connue,

$$\cot IGB = \frac{\cot IAG - \cot IBG}{2}$$

ou

$$(3) \quad 2 \tan \lambda = \cot(\varphi - \lambda) - \cot(\varphi' + \lambda).$$

2° Après quelques transformations, la dernière équation devient

$$2 \tan \lambda = \tan \varphi - \tan \varphi' = \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\cos \varphi \cos \varphi'},$$

$$2 \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} = \tan \lambda [\cos(\varphi - \varphi') + \cos(\varphi + \varphi')]$$

ou

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2 \sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} - \tan \lambda \left[ \cos^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2} - \sin^2 \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right] \\ & = \tan \lambda \cos(\varphi + \varphi'). \end{aligned} \right.$$

Or les équations (1) et (2), divisées membre à membre, donnent

$$\tan \frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{2 - K \cos \lambda}{K \sin \lambda},$$

d'où

$$\sin \frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{2 - K \cos \lambda}{\sqrt{4 - 4K \cos \lambda + K^2}},$$

$$\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{K \sin \lambda}{\sqrt{4 - 4K \cos \lambda + K^2}}.$$

Ces mêmes équations, étant ajoutées, après avoir été élevées au carré, donnent aussi

$$\cos(\varphi + \varphi') = 2K \cos \lambda - \frac{K^2}{2} - 1.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (4), on arrive à la suivante

$$(5) \quad [4K \cos \lambda - (K^2 + 3)]^2 = 2K^2 - 7,$$

d'où

$$\cos \lambda = \frac{K^2 + 3 \pm \sqrt{2K^2 - 7}}{4K}.$$

*Discussion.* — Les deux racines sont toujours positives; elles seront réelles si l'on a

$$(6) \quad K > \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Pour qu'elles soient admissibles, il faut qu'elles soient plus petites que 1. Écrivons que le résultat de la substitution de 1 à  $\cos \lambda$ , dans l'équation (5), est positif et que la somme des racines est plus petite que 2, nous obtiendrons les deux inégalités

$$(7) \quad K^4 - 8K^3 + 20K^2 - 24K + 16 > 0,$$

$$(8) \quad K^2 - 4K + 3 < 0,$$

qui expriment que les deux racines sont toutes deux  $< 1$ . Si le premier membre de l'inégalité (7) était négatif, une seule racine (celle obtenue en prenant le radical avec le signe —), serait plus petite que 1.

Cette inégalité peut d'abord s'écrire

$$(K - 2)(K^3 - 6K^2 + 8K - 8) > 0.$$

Égalant à zéro le polynôme de la seconde parenthèse, on obtient l'équation

$$K^3 - 6K^2 + 8K - 8 = 0,$$

qui a une seule racine réelle égale à 4,7, à 0,1 près par excès.

Par suite, l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(K - 2)[K - (4,7 - \alpha)] > 0,$$

$\alpha$  étant une quantité plus petite que 0, 1.

En y joignant l'inégalité (8), écrite sous la forme

$$(K - 1)(K - 3) < 0,$$

la discussion du problème est alors facile et peut se résumer dans le tableau suivant :

Variation de $K = \frac{l}{R}$	Nombre de solutions.
$K < \sqrt{\frac{7}{2}} \dots\dots\dots$	0
$K = \sqrt{\frac{7}{2}} \dots\dots\dots$	1
$\sqrt{\frac{7}{2}} < K \leq 2 \dots\dots\dots$	2
$2 < K \leq 4,7 - \alpha \dots\dots\dots$	1
$K > 4,7 - \alpha \dots\dots\dots$	0

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(PREMIÈRE SESSION, 1879);

SOLUTION DE M. J. BOUDÈNES,

Élève du lycée de Grenoble.

*Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy, sur Ox un point A, sur Oy un point B. On considère toutes les hyperboles équilatères qui passent au point A et sont tangentes à l'axe Oy au point B.*

*1° Former l'équation générale de ces hyperboles équilatères.*

2° Trouver le lieu des points de rencontre de la tangente en A à chacune de ces hyperboles avec les parallèles menées par l'origine aux asymptotes de cette même hyperbole.

3° Le lieu précédent est une parabole P : former l'équation de l'axe et l'équation de la tangente au sommet de cette parabole P, construire ces droites et déterminer géométriquement la grandeur du paramètre de cette parabole.

4° Trouver le lieu du sommet de la parabole P quand le point A se déplace sur Ox, le point B restant fixe.

Soient  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $k$  et  $\lambda$  des paramètres arbitraires.

1° Si l'équation

$$(1) \quad y = \lambda(x - a)$$

représente la tangente à l'une des hyperboles au point A, cette hyperbole aura pour équation

$$x[y - \lambda(x - a)] + k\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 = 0,$$

avec la condition

$$k = -\frac{\lambda}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}},$$

qui exprime que l'hyperbole est équilatère.

2° Les parallèles menées de l'origine aux asymptotes de ces hyperboles ont pour équation

$$(2) \quad x(y - \lambda x)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0.$$

Le lieu de leurs points d'intersection avec la tangente à l'hyperbole au point A, obtenu par l'élimination du

paramètre variable  $\lambda$  entre les équations (1) et (2), a donc pour équation

$$(3) \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 - ax\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 0.$$

C'est donc une parabole qui passe par l'origine des coordonnées et qui a pour tangente en ce point l'axe des  $y$ .

3°  $m$  étant un paramètre arbitraire, l'équation (3) de cette parabole s'écrit identiquement

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + m\right)^2 - ax\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2m}{a^2}\right) - \frac{2my}{b} - m^2 = 0.$$

La condition que le diamètre

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + m = 0$$

et la tangente à son extrémité

$$ax\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2m}{a^2}\right) + \frac{2my}{b} + m^2 = 0$$

sont perpendiculaires nous donne immédiatement

$$m = -\frac{1}{2},$$

d'où, pour équations de l'axe et de la tangente au sommet,

$$(4) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{1}{2} = 0,$$

$$(5) \quad \frac{x}{b} - \frac{y}{a} + \frac{b}{4a} = 0.$$

Si donc

$$OA_1 = \frac{OA}{2}, \quad OB_1 = \frac{OB}{2}, \quad OB_2 = \frac{OB}{4},$$

on voit aisément que l'axe de la parabole sera la droite

$A_1 B_1$  et la tangente au sommet la droite  $B_2 S$ , perpendiculaire à l'axe.

De plus, si la droite  $O\omega$  est perpendiculaire à l'axe, la longueur  $A_1\omega$  est une sous-normale de la parabole et représente, par suite, la grandeur du paramètre.

4° Le lieu du sommet  $S$  de la parabole  $P$ , quand le point  $A$  se déplace sur  $Ox$ , le point  $B$  restant fixe, a pour équation

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}by + \frac{b^2}{8} = 0,$$

obtenue par l'élimination du paramètre  $a$  entre les deux équations (5) et (4) de la tangente au sommet et à l'axe.

Ce lieu est un cercle dont le centre est au point

$$x = 0, \quad y = \frac{3}{4}b$$

et qui passe par le point  $B_1$ ,

$$x = 0, \quad y = \frac{b}{2}.$$

*Note.* — La même question a été résolue par MM. H. Lez; J. Zelle, élève du lycée de Moulins; H. Herzog, du lycée de Rouen; H. Courbe.

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880 (1).

### *Composition de Mathématiques.*

On donne une ellipse et un cercle ayant pour centre un foyer  $F$  de l'ellipse.

(1) Questions données à quelques élèves qui n'ont pu concourir plus tard.

On demande :

1° De trouver le lieu I du point tel que, si l'on mène par ce point des tangentes à l'ellipse et au cercle, les coefficients angulaires  $m$  et  $m'$  des tangentes à l'ellipse et les coefficients angulaires  $k$  et  $k'$  des tangentes au cercle vérifient la relation

$$2(mm' + kk') = (m + m')(k + k');$$

2° De trouver l'équation du lieu P du point de contact des tangentes menées par un point donné à tous les lieux I correspondant aux diverses valeurs du carré du rayon du cercle ;

3° De construire le lieu P, lorsque le point donné est situé sur le grand axe de l'ellipse ;

4° De construire le lieu P, lorsque le point donné est situé sur la directrice correspondant au foyer F de l'ellipse.

### *Composition de Géométrie descriptive.*

Un cône et un cylindre pleins étant donnés, on enlève leurs parties non communes, ainsi que la portion de

$$\begin{aligned} AC &= 10^{\text{cm}} \\ AB &= 16 \\ AH &= 20 \\ AV &= 16 \\ VD &= 3 \end{aligned}$$

chacun des deux corps qui se trouve au-dessus du plan horizontal : représenter par ses projections le solide restant.

Le cône est de révolution et a son axe vertical. La trace verticale du cylindre est un cercle de  $0^m,04$  de rayon.

Ayant tracé la ligne de terre BAC parallèlement aux petits côtés de la feuille et la ligne HAV parallèlement aux grands, la première à  $0^m,02$  au-dessus et la seconde à  $0^m,03$  à gauche du centre du rectangle formé par les côtés du cadre, portez sur ces deux lignes les quatre premières longueurs indiquées par la légende et la cinquième sur CV; tirez aussi HB. La droite qui a sa trace horizontale en H et sa trace verticale en V est parallèle aux génératrices du cylindre et contient le sommet du cône. La trace horizontale de celui-ci est tangente à HB et à la ligne de terre. La trace verticale du cylindre est située à droite de CV et touche cette ligne en D.

### CORRESPONDANCE.

M. Ernest Lebon nous prie de faire remarquer que la propriété qu'il a démontrée (2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 133) est vraie quand le point  $\bar{o}$  est situé sur l'un quelconque des axes d'une conique à centre.

### ERRATUM AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Introduction, page x, second exemple : *au lieu de*

$$\log \text{tang } 15^{\circ} 33' 40'' = 1,4447839.$$

*lisez*

$$\log \text{tang } 15^{\circ} 33' 40'' = \bar{1},4447839.$$

Cette faute a été signalée par M. Besche.



## NOTE SUR LES LIMITES ET LES NOMBRES INCOMMENSURABLES ;

PAR M. E. JABLONSKI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon.

Dans la plupart des définitions ou des démonstrations reposant sur la notion de limite, on est obligé de former des suites de nombres constamment croissants ou constamment décroissants, et il en résulte des difficultés ou des longueurs que l'on peut éviter au moyen d'un théorème plus général que celui sur lequel on s'appuie ordinairement.

Je vais établir ce théorème en reprenant la suite des propositions qui y conduisent.

**THÉORÈME I.** — *Lorsque deux variables sont constamment égales, si l'une tend vers une limite, l'autre tend vers la même limite.*

**THÉORÈME II.** — *Lorsque la différence de deux variables tend vers zéro en même temps que l'une d'elles tend vers une limite, l'autre tend vers la même limite.*

Soient  $u$  et  $v$  deux variables, et  $u - v = \alpha$ ; supposons que  $v$  tende vers  $l$  et  $\alpha$  vers zéro. On a

$$v = l + \beta,$$

$\beta$  tendant vers zéro; donc

$$u = l + \alpha + \beta.$$

$\alpha$  et  $\beta$  tendant vers zéro en même temps, il en est de même de leur somme; donc  $u$  tend vers  $l$ .

**THÉORÈME III.** — *Lorsqu'une variable constamment*



nombres,

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_p, a_q, a_r, \dots, a_n, \dots,$$

$$b_0, b_1, b_2, \dots, b_p, b_q, b_r, \dots, b_n, \dots,$$

sont telles que l'un quelconque des nombres de la première soit moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde, et que la différence  $b_n - a_n$  entre deux termes correspondants tende vers zéro lorsque  $n$  croît indéfiniment, les deux suites tendent vers une limite commune.

La différence  $b_n - a_n$  tendant vers zéro, il suffit de prouver que la première suite tend vers une limite.

Soit  $a_p$  un nombre de la première suite. Supposons d'abord qu'il soit plus grand que tous ceux qui le précèdent et qui le suivent. On a, par hypothèse, quelque grand que soit  $n$ ,

$$a_n < a_p < b_n.$$

Or  $b_n - a_n$  tend vers zéro; donc  $a_n$  et  $b_n$  tendent vers  $a_p$ , et le théorème est démontré. Sinon, on peut trouver, parmi ceux qui suivent  $a_p$ , un nombre  $a_r > a_p$ . En répétant le même raisonnement sur  $a_r$ , et ainsi de suite, on voit que, si aucun des nombres de la première suite n'est la limite commune, on peut, dans cette suite, former une suite de nombres constamment croissants.

Soient  $a_0, a_1, \dots, a_p, a_r, \dots, a_m, \dots, a_{m'}, \dots$  cette suite, et  $a_n$  un nombre d'indice intermédiaire entre  $m$  et  $m'$ , et qui par suite est moindre que  $a_{m'}$ . On a

$$a_{m'} - a_n < b_n - a_n,$$

puisque, par hypothèse,

$$a_{m'} < b_n;$$

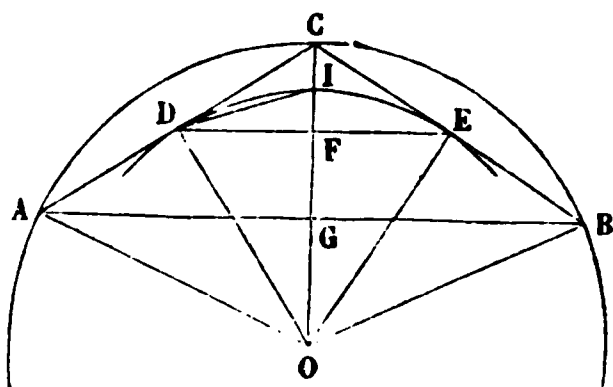
donc  $a_{m'} - a_n$  tend vers zéro lorsque les indices croissent indéfiniment. Les conditions énoncées dans le

théorème IV étant satisfaites, la première suite tend vers une limite, ce qu'il fallait démontrer.

PREMIÈRE APPLICATION. — *Longueur d'une circonférence.* — Inscrivons dans une circonférence une suite de polygones convexes quelconques dont le nombre des côtés croisse indéfiniment d'une manière quelconque, pourvu que tous les côtés tendent vers zéro. Soit DE. . . un de ces polygones; par les sommets, menons des tangentes à la circonférence : elles forment le polygone convexe circonscrit ACB. . . . Nous aurons ainsi deux suites de polygones qui se correspondent deux à deux.

Soient  $a_n$  le périmètre de l'un des polygones inscrits,  $b_n$  celui du polygone circonscrit correspondant. Si l'on fait croître  $n$  d'une manière quelconque, on obtient deux

Fig. 1.



suites indéfinies. Le périmètre de l'un quelconque des polygones inscrits est évidemment moindre que celui de l'un quelconque des polygones circonscrits; de plus, la différence  $b_n - a_n$  tend vers zéro. En effet, on a (fig. 1)

$$\frac{DC}{DF} = \frac{OC}{OD},$$

d'où

$$\frac{DC - DF}{DF} = \frac{IC}{OD},$$

$$DC - DF = \frac{IC \cdot DF}{OD}.$$

$b_n - a_n$  se compose de la somme des différences telles

que  $DC - DF$ ; donc

$$b_n - a_n = \Sigma (DC - DF) = \frac{1}{OD} \Sigma IC \cdot DF.$$

Soit  $\alpha$  la plus grande des flèches  $IC$ ; on a

$$\Sigma IC \cdot DF < \alpha \Sigma DF \quad \text{ou} \quad \Sigma IC \cdot DF < \alpha a_n;$$

donc

$$b_n - a_n < \frac{a_n}{OD} \alpha.$$

$a_n$  conserve une valeur finie, et, toutes les flèches tendant vers zéro, il en est de même de  $\alpha$ ; donc  $b_n - a_n$  tend vers zéro.

Il en résulte que, quelle que soit la loi d'inscription, les périmètres des polygones convexes inscrits et circonscrits, réguliers ou non, tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la longueur de la circonférence considérée.

Un procédé tout semblable permet de définir la longueur d'un arc convexe d'une courbe quelconque.

DEUXIÈME APPLICATION. — *Définition de  $\sqrt{2}$ .* — Soient  $m$  et  $n$  deux nombres entiers, tels que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 < 2 < \left(\frac{m+1}{n}\right)^2,$$

ce que l'on peut toujours faire.

A chaque valeur de  $n$  correspond une valeur de  $m$  et une seule.

Faisons croître  $n$  d'une manière quelconque, et soient

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m'}{n'}, \quad \dots,$$

$$\frac{m+1}{n}, \quad \frac{m'+1}{n'}, \quad \dots$$

les deux suites indéfinies ainsi obtenues. Un quel-

conque des nombres de la première a un carré moindre que celui de l'un quelconque des nombres de la seconde; donc l'un quelconque des nombres de la première est moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde.

D'ailleurs, la différence  $\frac{1}{n}$  de deux termes correspondants tend vers zéro; donc les deux suites tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur arithmétique de  $\sqrt{2}$ .

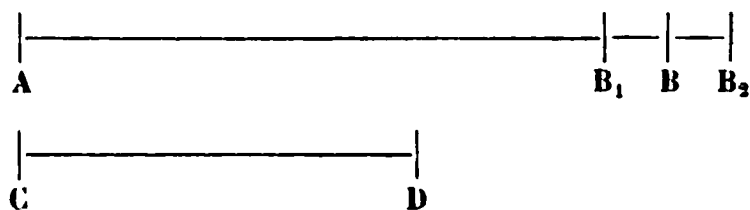
Les nombres  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m+1}{n}$  sont les valeurs de  $\sqrt{2}$  à  $\frac{1}{n}$  près, par défaut ou par excès.

**TROISIÈME APPLICATION. — Définition des nombres incommensurables et des opérations faites sur ces nombres.** — Pour définir le rapport de deux grandeurs, on imagine d'abord que ces grandeurs ont une commune mesure; le rapport est alors le nombre fractionnaire ordinaire dont les termes sont les nombres entiers qui expriment combien de fois chacune des grandeurs contient la commune mesure.

Cette définition ne subsiste plus lorsque les deux grandeurs n'ont pas de commune mesure : il faut lui substituer une autre définition, reposant sur la notion de limite.

Pour fixer les idées, soient deux longueurs AB et CD, qui n'ont pas de commune mesure. Divisons CD en  $n$  par-

Fig. 2.



ties égales, et portons une de ces parties autant de fois que possible sur AB à partir de A; supposons que l'on

puisse la porter  $m$  fois et qu'on obtienne ainsi le point  $B_1$  ; en la portant une fois de plus, on dépassera  $B$  et on obtiendra le point  $B_2$ . Quelque grand que soit  $n$ , on ne tombera jamais au point  $B$ , et, en faisant croître indéfiniment ce nombre, on obtiendra deux suites de longueurs telles que  $AB_1$  et  $AB_2$ , les unes toutes moindres que  $AB$ , les autres toutes supérieures à  $AB$  et tendant évidemment vers  $AB$ .

Les rapports de  $AB_1$  et  $AB_2$  à  $CD$  sont respectivement  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m+1}{n}$ , lorsque  $n$  croît indéfiniment ; on a ainsi deux suites illimitées de nombres. Tous ceux de la première mesurant des longueurs moindres que  $AB$  et ceux de la seconde des longueurs supérieures à  $AB$ , un quelconque des nombres de la première est moindre que l'un quelconque des nombres de la seconde ; d'ailleurs la différence  $\frac{1}{n}$  entre deux termes correspondants tend vers zéro : donc ces deux suites, c'est-à-dire  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m+1}{n}$ , tendent vers une limite commune qui est, par définition, le rapport de  $AB$  à  $CD$ .

Cette définition n'exige pas que toutes les longueurs  $AB_1$  soient croissantes, ni que toutes les longueurs  $AB_2$  soient décroissantes ;  $n$  peut croître d'une manière absolument quelconque sans que la limite soit changée.

De la même manière on peut définir les opérations sur les nombres incommensurables.

*Addition.* — Soit à définir  $a + b$ ,  $a$  et  $b$  étant des nombres incommensurables.

Soient  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m+1}{n}$  les nombres qui tendent vers  $a$ , comme il résulte de la définition précédente ;  $\frac{m_1}{n_1}$  et  $\frac{m_1+1}{n_1}$  ceux qui tendent vers  $b$ .

Formons

$$\frac{m}{n} + \frac{m_1}{n_1} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{n} + \frac{m_1+1}{n_1}.$$

Si l'on fait croître  $n$  et  $n_1$  d'une manière quelconque, on obtient deux suites indéfinies de pareilles sommes dont le sens est bien défini, puisque les termes en sont commensurables. L'un quelconque des nombres  $\frac{m}{n}$  étant moindre que l'un quelconque de la suite  $\frac{m+1}{n}$ , et de même pour  $\frac{m_1}{n_1}$ , on voit que  $\frac{m}{n} + \frac{m_1}{n_1}$  sera moindre que l'une quelconque des sommes telles que  $\frac{m+1}{n} + \frac{m_1+1}{n_1}$ ; d'ailleurs, la différence entre deux sommes correspondantes est  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}$ , qui tend vers zéro; donc ces deux sommes tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur de  $a + b$ .

*Soustraction.* — Il s'agit de définir  $a - b$ .

Soient  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m+1}{n}$  les nombres commensurables qui tendent vers  $a$ ;  $\frac{m_1}{n_1}$  et  $\frac{m_1+1}{n_1}$  ceux qui tendent vers  $b$ .

Supposons  $a > b$ ; on peut imaginer que  $n$  et  $n_1$  soient assez grands pour que l'on ait aussi  $\frac{m}{n} > \frac{m_1+1}{n_1}$ , et par suite  $\frac{m+1}{n} > \frac{m_1}{n_1}$ . Formons les deux différences

$$\frac{m}{n} - \frac{m_1+1}{n_1} \quad \text{et} \quad \frac{m+1}{n} - \frac{m_1}{n_1}.$$

On voit sans peine que, si l'on forme les deux suites en faisant croître  $n$  et  $n_1$ , un quelconque des nombres de la première est moindre que l'un quelconque des



nombres de la seconde; d'ailleurs, la différence  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}$  tend vers zéro : donc ces deux différences tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur de  $a - b$ .

On procède de même pour toutes les autres opérations; il est d'ailleurs facile de définir, en général, une expression telle que  $f(x, y, z, \dots)$ , pour des valeurs incommensurables des lettres qui y entrent. Supposons que cette expression reste finie et continue lorsque  $x, y, z, \dots$  ont des valeurs commensurables comprises dans de certains intervalles, et soient  $a, b, c, \dots$  des nombres incommensurables compris dans ces mêmes intervalles.

Imaginons que l'on remplace successivement  $x$  par  $\frac{m}{n}$  et  $\frac{m+1}{n}$ , ou inversement, suivant que  $f$  croît ou décroît en valeur absolue lorsque  $x$  croît, et de même pour  $y, z, \dots$ ; on formera de la sorte deux expressions dont les valeurs seront bien définies, puisqu'elles dépendront de nombres commensurables. Par le même raisonnement, basé sur le théorème général, on prouve que les valeurs numériques ainsi obtenues tendent vers une limite commune, qui est, par définition, la valeur de  $f(a, b, c, \dots)$ .

Il y a plus : toute relation

$$f(x, y, z, \dots) = \varphi(x, y, z, \dots),$$

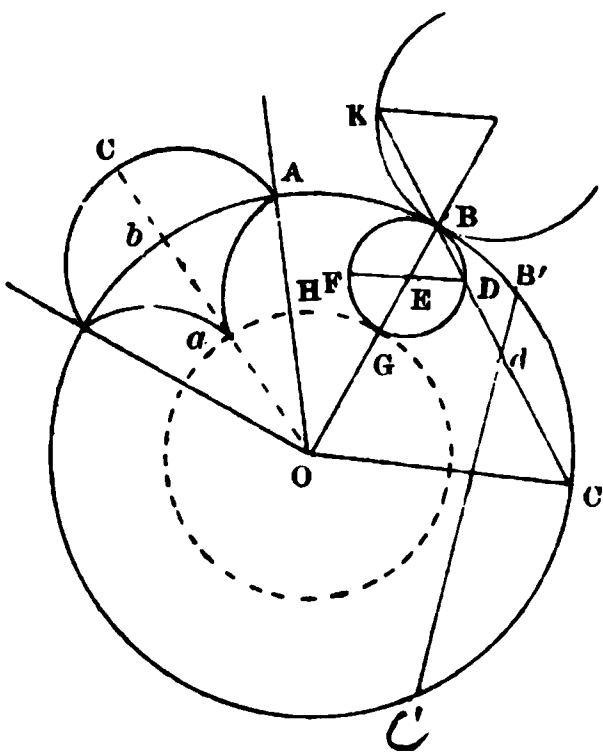
vraie pour toutes les valeurs de  $x, y, z, \dots$  commensurables prises dans de certains intervalles, subsiste si l'on y remplace  $x, y, z, \dots$  par des nombres incommensurables  $a, b, c, \dots$  compris dans les mêmes intervalles.

En effet, si l'on fait dans  $\varphi$  les mêmes substitutions que dans  $f$ , on obtient des nombres  $f'$  et  $\varphi'$ ,  $f''$  et  $\varphi''$ ; or on a, par hypothèse,

$$f' = \varphi', \quad f'' = \varphi'';$$



tion de l'enveloppée, et les triangles semblables  $BdB'$  et  $CdC'$  donnent  $dB' : dC = \text{corde } BB' : \text{corde } \frac{1}{2} BB'$ , en sorte que, lorsqu'on fait tendre  $B'$  vers  $B$ , on aura à la limite  $DB = \frac{1}{12} DC$  ou  $BD = \frac{1}{13} BC$ . Menant des paral-



lèles à  $CO$ , on aura aussi  $BE = ED = \frac{1}{13} BO$ , et le cercle décrit du centre  $E$  avec le rayon  $EB$  passera par  $D$  et sera tangent au cercle décrit du centre  $O$  du cadran avec le rayon  $OG = \frac{11}{13} OB$ . L'angle  $FEG$ , égal à l'angle  $BOC$ , étant onze fois l'angle  $HOG$ , tandis que le rayon  $EG$  est  $\frac{1}{11}$  du rayon  $OG$ , l'arc de cercle  $FG$  aura la même longueur que l'arc  $GH$ . Donc le point  $F$  est un point de l'épicycloïde décrite par le point de contact  $H$  quand le cercle  $EG$ , en partant de la position où il touche le cercle  $OH$  en  $H$ , roule sur ce cercle directeur  $OH$ , et, par conséquent, le point diamétralement opposé  $D$  est un point de l'épicycloïde égale que décrit alors le point  $A$  du cercle mobile; celle-ci est donc l'enveloppe cherchée.

Si l'on divise le cadran, à partir du point de midi  $A$ ,



**QUESTIONS NOUVELLES D'ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE  
PROPOSÉES PAR M. ÉDOUARD LUCAS;**

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XV, p. 83);

PAR M. MORET-BLANC.

1. *Déterminer le dernier chiffre du  $n^{\text{ième}}$  terme de la série de Lamé donnée par la loi de récurrence*

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

*et les conditions initiales  $u_0 = 0, u_1 = 1$ .*

Les derniers chiffres forment nécessairement une période, qui recommencera lorsque les derniers chiffres de deux termes consécutifs redeviendront les mêmes. Formons cette période :

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7,  
0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9,  
0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3,  
0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1.

On voit que

termine les termes de rang	$60m + (1, 16, 31, 46),$
»	$60m + (2, 3, 9, 20, 23, 29, 42, 60),$
»	$60m + (4, 37, 55, 58),$
»	$60m + (5, 8, 14, 27, 45, 47, 48, 54),$
»	$60m + (10, 13, 19, 52),$
»	$60m + (6, 11, 21, 26, 36, 41, 51, 56),$
»	$60m + (22, 40, 43, 49),$
»	$60m + (15, 17, 18, 24, 35, 38, 44, 47),$
»	$60m + (7, 25, 28, 34),$
»	$60m + (12, 30, 32, 33, 39, 50, 53, 59);$

112 peut être 0.

Au moyen de ce tableau, le reste de la division de  $n$



Les restes successifs seront, d'après la formule (1),

$$u_{p-m}, u_{p-2m}, u_{p-3m}, \dots,$$

jusqu'à ce que l'on passe d'un indice positif à un indice négatif. Soient  $p'$  le plus petit,  $q'$  le plus grand des deux indices en valeur absolue, et  $q' - p' = m'$ ; on aura ensuite

$$u_{p'-m'}, u_{p'-2m'}, \dots,$$

et ainsi de suite. En d'autres termes, les restes seront des termes de la série ayant pour indices les restes qu'on obtiendrait si, dans la recherche du plus grand commun diviseur entre  $p$  et  $m$ , on faisait les divisions par soustractions successives.

Les restes sont ainsi exprimés en termes de la série dont les indices sont fonctions de  $p$  et  $q$ . Nous verrons plus loin l'expression d'un terme de la série en fonction de son indice.

### 3. *Traiter les mêmes questions pour la série*

$$0, 1, 2, 5, 12, \dots,$$

*données par la loi de récurrence*

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n,$$

*et généralement pour les séries récurrentes du premier genre données par la loi*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

*dans laquelle  $a$  et  $b$  désignent des nombres premiers entre eux.*

La période des derniers chiffres se forme de la même

manière; elle est, pour la première série,

$$\begin{array}{lll}
 & 0, & 1, & 2, & 5, & 2, & 9, & 0, & 9, & 8, & 5, & 8, & 1; \\
 0 & \text{termine les termes de rang} & 12m + (1, 7), \\
 1 & & \text{»} & & 12m + (2, 12), \\
 2 & & \text{»} & & 12m + (3, 5), \\
 5 & & \text{»} & & 12m + (4, 10), \\
 8 & & \text{»} & & 12m + (9, 11), \\
 9 & & \text{»} & & 12m + (6, 8).
 \end{array}$$

Aucun terme n'est terminé par 3, 4, 5, 6.

Les formules qui expriment les restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de  $u_p$  et  $u_q$  en termes de la série restent les mêmes que pour la série de Lamé.

Considérons la série

$$\begin{aligned}
 & 0, 1, a, a^2 + b, a^3 + 2ab, a^4 + 3a^2b + b^2, \\
 & a^5 + 4a^3b + 3ab^2, a^6 + 5a^4b + 6a^2b^2 + b^3, \dots,
 \end{aligned}$$

dont la loi de récurrence est

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Si l'on prend les termes de  $m$  en  $m$ , et qu'on désigne par  $v$  les termes de la série obtenue, on aura

$$v_{n+2} = Av_{n+1} \mp b^m v_n,$$

suivant que  $m$  est pair ou impair, avec

$$A = \frac{u_{2m}}{u_m},$$

nombre entier.

Si l'on a soin de supprimer, dans chaque reste obtenu dans la recherche du plus grand commun diviseur de  $u_p$  et  $u_q$ , le facteur  $b^m$  qui est premier avec le diviseur, puis  $b^{m'}$ , quand on sera ramené à chercher le plus grand commun diviseur de  $u_{p'}$  et  $u_{q'}$ , ..., la loi des restes sera la même que dans les deux cas déjà considérés.



**A.** Trouver l'expression générale du terme de la série, en supposant  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$ , quelles que soient les valeurs de  $a$  et  $b$ .

La fonction génératrice de la série est

$$\begin{aligned} \frac{1}{-ax - b.x^2} &= \frac{1}{\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2b} - x\right) \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2b} + x\right)} \\ &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + 4b}} \left( \frac{1}{\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2b} - x} + \frac{1}{\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2b} + x} \right). \end{aligned}$$

$u_n$  est le coefficient de  $x^{n-1}$  dans le développement de cette fonction ordonnée suivant les puissances croissantes de  $x$ ; on a donc

$$u_n = \frac{b}{\sqrt{a^2 + 4b}} \left[ \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2b} \right)^n - \left( \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2b} \right)^n \right]$$

ou

$$\begin{aligned} u_n = a^{n-1} + \frac{n-2}{1} a^{n-3} b + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} a^{n-5} b^2 \\ + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} a^{n-7} b^3 + \dots \end{aligned}$$

Si l'on fait  $a = 1$ ,  $b = 1$ , on a, pour la série de Lamé,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

et, en faisant  $a = 2$ ,  $b = 1$ , on a, pour la série du n° 3,

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n].$$

Nous avons obtenu les restes de la recherche du plus grand commun diviseur entre  $u_p$  et  $u_q$ , exprimés en termes de la série dont les indices sont fonctions de  $p$  et  $q$ ; on pourra donc exprimer les restes eux-mêmes en fonction de  $p$  et  $q$ .

5. Si  $p$  désigne un nombre premier et  $u_p$  l'expression

$$u_p = \frac{(a + \sqrt{b})^p - (a - \sqrt{b})^p}{\sqrt{b}},$$

démontrer que  $u_{p+1}$  est divisible par  $p$  si  $b$  est un non-résidu quadratique de  $p$ , et que  $u_{p-1}$  est divisible par  $p$ , en exceptant les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $a^2 - b$  est divisible par  $p$ , si  $b$  désigne un résidu quadratique de  $p$ .

On a

$$u_{p+1} = \frac{(a + \sqrt{b})^{p+1} - (a - \sqrt{b})^{p+1}}{\sqrt{b}}.$$

Développant et supprimant les termes qui contiennent le facteur  $p$ , on a

$$u_{p+1} \equiv 2(p+1)a \left( a^{p+1} + b^{\frac{p-1}{2}} \right) \pmod{p}.$$

Or

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad (\text{théorème de Fermat}),$$

et,  $b$  étant un non-résidu quadratique de  $p$ ,

$$b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p};$$

donc

$$u_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On a

$$\begin{aligned} u_{p-1} &= \frac{(a + \sqrt{b})^{p-1} - (a - \sqrt{b})^{p-1}}{\sqrt{b}} \\ &\equiv -2a \left( a^{p-3} + a^{p-5}b + a^{p-7}b^2 + \dots + b^{\frac{p-3}{2}} \right) \\ &\equiv \frac{-2a \left[ (a^2)^{\frac{p-1}{2}} - b^{\frac{p-1}{2}} \right]}{a^2 - b} \equiv \frac{-2a(1-1)}{a^2 - b} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Le numérateur  $\equiv 0 \pmod{p}$ , c'est-à-dire qu'il est divisible par  $p$ ; donc, si  $a^2 - b$  n'est pas divisible par  $p$ ,  $u_{p-1}$  le sera nécessairement.

C. Q. F. D.

## 8. Résoudre complètement l'équation

$$x^2 + (x + 1)^2 + \dots + [x + (n - 1)]^2 = y^2$$

pour les valeurs de  $n$  égales à 2, 11, 23, 24.

$$\begin{aligned} x^2 + (x + 1)^2 + \dots + [x + (n - 1)]^2 \\ = nx^2 + n(n - 1)x + \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} = y^2. \end{aligned}$$

1° Soit  $n = 2$  :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 1 = y^2 &= \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^2 \\ &= 1 + \frac{2m}{n}x + \frac{m^2}{n^2}x^2, \quad \frac{m}{n} > 1, \end{aligned}$$

d'où

$$x = \frac{2n(m - n)}{2n^2 - m^2};$$

$x$  sera entier et positif si l'on a

$$2n^2 - m^2 = 1 \quad \text{ou} \quad 2n^2 - m^2 = 2.$$

Dans le second cas,  $m$  doit être pair; posons alors  $m = 2m'$ .

On a à trouver les solutions des deux équations

$$(1) \quad m^2 - 2n^2 = -1,$$

$$(2) \quad n^2 - 2m'^2 = 1.$$

Elles seront données par les réduites de rang pair pour (1) et de rang impair pour (2) dans le développement de  $\sqrt{2}$  en fraction continue. On obtient ainsi les doubles séries de valeurs

$$m = 1, 7, 41, 239, 1393, 8119, \dots,$$

$$n = 1, 5, 29, 169, 985, 5741, \dots,$$

$$m = 0, 4, 24, 140, 816, 4756, \dots,$$

$$n = 1, 3, 17, 99, 577, 3363, \dots$$

On en déduit les deux séries de valeurs

$$x = 0, 20, 696, 23660, 803760, 27304196, \dots,$$

$$x = -1, 3, 119, 4059, 137903, 4684659, \dots,$$

qu'on peut réunir en une seule

$$x = -1, 0, 3, 20, 119, 696, 4059, 23660, 137903, 803760, \dots$$

dont la loi de récurrence est

$$u_{n+3} = 7(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_n.$$

2° Soit  $n = 11$ :

$$11x^2 + 110x + 11 \times 35 = y^2$$

ou

$$11(x + 5)^2 + 110 = y^2,$$

$$y^2 - 11(x + 5)^2 = 110.$$

Posons

$$y = \pm 11(x + 5 - 10u),$$

$y$  étant évidemment un multiple de 11; l'équation devient, en divisant par 110,

$$(x + 5)^2 - 22u + 110u^2 = 1,$$

et, en posant  $x + 5 - 11u = \pm x_1$ ,

$$x_1^2 - 11u^2 = 1.$$

Les valeurs de  $x_1$  et de  $u$  sont données par les réduites de rang impair dans le développement de  $\sqrt{11}$  en fraction continue; ce sont

$$x_1 = 1, 10, 199, 3970, 79201, 1580050, \dots,$$

$$u = 0, 3, 60, 1197, 23880, 476403, \dots,$$

et, comme  $x = 11u - 5 \mp x_1$ , on a les deux séries de valeurs de  $x$

$$x = -6, 18, 456, 9192, 183474, 3660378, \dots,$$

$$x = -4, 38, 854, 17132, 341876, 6820478, \dots,$$

et les deux séries de valeurs correspondantes de  $y$

$$y = 11, 77, 1529, 30503, 608531, \dots,$$

$$y = 11, 143, 2849, 56837, 1133891, \dots$$

La loi de récurrence pour chaque série est

$$u_{n+3} = 21(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_n.$$

3° Soit  $n = 23$  :

$$23x^2 + 23 \times 22x + 23 \times 165 = y^2$$

ou

$$y^2 - 23(x + 11)^2 = 23 \times 44$$

( $y$  est multiple de 23).

Posons

$$y = \pm 23(x + 11 - 22u);$$

l'équation devient, en divisant par  $23 \times 22$ ,

$$(x + 11 - 23u)^2 - 23u^2 = 2,$$

ou, en posant  $x + 11 - 24u = \pm x_1$ ,

$$x_1^2 - 23u^2 = 2.$$

Les solutions de cette équation sont données par les réduites de rang pair correspondant au quotient complet de dénominateur 2 dans le développement de  $\sqrt{23}$  en fraction continue; les dénominateurs des quotients complets sont

$$7, 2, 7, 1, 7, 1, 7, 1, \dots$$

Une seule réduite satisfait à la question : c'est  $\frac{5}{1}$ .

On a donc

$$x_1 = 5, \quad u = 1, \quad \text{d'où} \quad x = 12 \mp 5,$$

$$x = 7, \quad y = 92,$$

$$x = 17, \quad y = 138.$$

En donnant à  $u$  la valeur  $-1$ , on aurait les solutions négatives

$$x = -29, \quad x = -39.$$

4° Soit  $n = 24$ .

$$24x^2 + 24 \times 23x + 4 \times 23 \times 47 = y^2$$

ou

$$6(2x + 23)^2 + 1150 = y^2.$$

$2x + 23$ ,  $1150$  et  $y$  étant premiers entre eux deux à deux, on peut, si l'équation est résoluble, satisfaire à l'équation indéterminée du premier degré

$$y = n(2x + 23) - 1150u,$$

où  $y$  et  $x$  seraient des valeurs données satisfaisant à l'équation du second degré, et  $n$  et  $u$  des indéterminées.

Substituant cette valeur de  $y$ , on a

$$(n^2 - 6)(2x + 23)^2 - 2300nu(2x + 23) + 1150^2u^2 = 1150.$$

Il faut que  $n^2 - 6$  soit divisible par  $1150$ ; or,

$$34^2 - 6 = 1150.$$

Posons donc  $n = 34$  et divisons par  $1150$ ; il vient

$$(2x + 23)^2 - 68u(2x + 23) + 1150u^2 = 1$$

ou

$$(2x + 23 - 34u)^2 - 6u^2 = 1,$$

ou, en posant  $2x + 23 - 34u = \pm x_1$ ,

$$x_1^2 - 6u^2 = 1.$$

Les solutions de cette équation sont données par les ~~les~~ réduites de rang impair dans le développement de  $\sqrt{\frac{6}{5}}$  en fraction continue; ce sont :

$$x_1 = 1, 5, 49, 485, 4801, 47525, 470449, 4656965, \dots$$

$$u = 0, 2, 20, 198, 1960, 19402, 192060, 1901198, \dots$$

$$x = \frac{34u - 23 \pm x_1}{2},$$

d'où

$$x = -11, 25, 353, 3597, 35709, 353585, 3500283, \dots,$$

$$x = -12, 20, 304, 3112, 30908, 306060, 3029784, \dots,$$

puis

$$y = 34, 182, 1786, 17678, \dots,$$

$$y = 34, 158, 1546, 15302, \dots$$

La loi de récurrence pour chacune des quatre séries est

$$u_{n+3} = 11(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_n.$$

9. *Démontrer, sans se servir de la Table des nombres premiers, que  $2^{31} - 1$  est un nombre premier.*

$$2^{31} - 1 = 2147483647,$$

dont la racine carrée, à une unité près, est 46340.

Il faut démontrer que  $2^{31} - 1$  n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à 46340.

Or,  $2^{31} - 1$  n'admet que des diviseurs de la forme  $62m + 1$ , et comme ils doivent diviser aussi  $2^{32} - 2$ , qui est de la forme  $t^2 - 2u^2$ , et n'admet que des diviseurs de la forme  $8m + 1$  et  $8m + 7$ , les diviseurs de  $2^{31} - 1$  doivent être de la forme  $248m + 1$  ou  $248m + 63$ .

Il y a  $\left(\frac{46340}{248}\right) = 186$  nombres de chaque forme inférieurs à 46340, parmi lesquels on peut supprimer ceux qui ne sont pas premiers.

A cet effet, je représente les 186 nombres de chaque série par son numéro d'ordre 1, 2, 3, 4, ..., 186.

Considérons d'abord les nombres  $248m + 1$ .

Soient  $p$  un nombre premier,  $r$  le reste de la division de 248 par  $p$ , et  $n$  le numéro d'ordre du premier terme divisible par  $p$ ; on aura

$$1 + nr = mp \quad \text{ou} \quad mp - nr = 1.$$

$n$  sera donné rapidement par la réduction de  $\frac{m}{n}$  en fraction continue; ce sera le numérateur de l'avant-dernière réduite, pris avec le signe  $+$  ou le signe  $-$  suivant que cette réduite est de rang pair ou impair,  $\frac{1}{0}$  étant la première. S'il est négatif, on le remplacera par le complément à  $p$ . On effacera les nombres  $n + kp$ .

Pour les nombres  $248m + 63$ , il faudra multiplier cette valeur de  $n$  par le reste de la division de 63 par  $p$  et supprimer le multiple de  $p$  contenu dans le produit.

En opérant ainsi, et ayant égard aux nombres premiers  $< 263$ , il ne reste dans la première série que les termes

6, 11, 17, 21, 24, 26, 29, 32, 35, 36, 41,  
45, 47, 50, 59, 62, 66, 71, 74, 80, 81, 87,  
89, 92, 95, 96, 104, 105, 110, 111, 116, 117, 120,  
125, 126, 146, 147, 150, 155, 161, 162, 171, 176, 180,  
182, 186,

où  $n$  représente  $248n + 1$ , et dans la seconde série

1, 5, 10, 11, 20, 22, 25, 37, 46, 47, 52,  
58, 62, 65, 68, 76, 82, 85, 86, 95, 113, 118,  
121, 122, 125, 136, 137, 142, 143, 148, 163, 166, 167,  
170, 172, 173, 176, 178, 185,

où  $n$  représente  $248n + 63$ .

En tout, 85 diviseurs à essayer.

Si l'on écrit les produits de 248 par les neuf premiers nombres, tous ces diviseurs s'obtiendront immédiatement ou par l'addition de deux nombres.

Trois seulement, 311, 1303, 1489, donnant des quotients de sept chiffres, on vérifie par la division ordinaire qu'ils ne divisent par 2147483647. Pour tous les



autres, on peut opérer par logarithmes; les Tables à 7 décimales donnent avec certitude le dernier chiffre du quotient, et l'on ne conserve que les diviseurs dont le dernier chiffre multiplié par le dernier chiffre du quotient donne un produit terminé par 7.

Cette condition n'est remplie que par les nombres suivants :

Diviseurs . . .	{	5953, 17609, 18353, 20399, 21143,
	{	27281, 29761, 32303, 40487.
Quotients . . .	{	360739, 121953, 117009, 105273, 101559,
	{	78717, 72157, 66479, 53041.

Les preuves par 9 et par 11 montrent que le produit de l'un de ces diviseurs par le quotient correspondant ne peut pas être égal à 2147483647; donc ce nombre, n'admettant pas de diviseur inférieur à sa racine carrée, est un nombre premier. C. Q. F. D.

*Note.* — Il reste à résoudre les numéros 6 et 7.

## CORRESPONDANCE.

*Extrait d'une Lettre de M. Haillecourt,  
inspecteur honoraire de l'Université.*

Le principe invoqué par M. Barbarin, dans sa *Note sur le planimètre polaire* (voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 212), pourrait s'énoncer ainsi (voir la figure) :

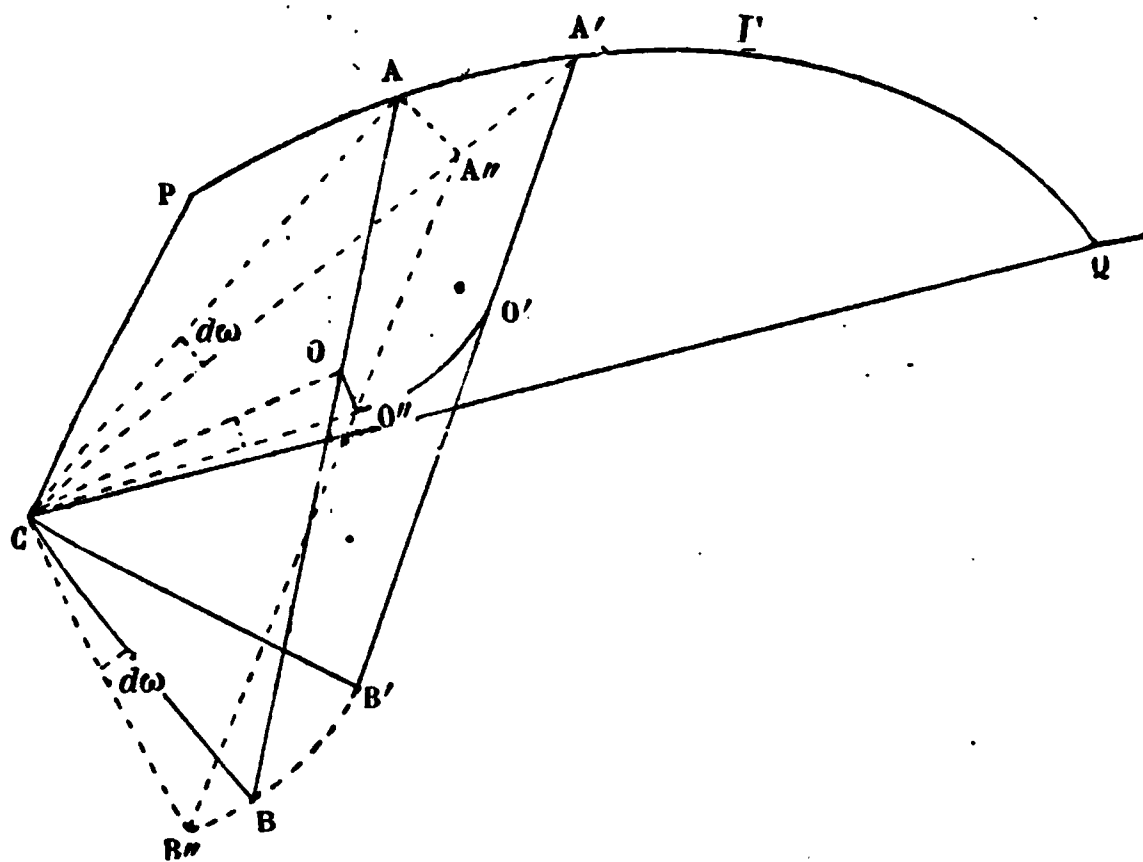
*Pourvu que  $B'A' = BA$ , B et B' étant sur une même circonférence qui a C pour centre, l'angle ACA' est invariable.*

Pour s'assurer de la fausseté de ce prétendu principe, il n'est nécessaire que d'examiner un des nombreux cas



d'une translation rectiligne  $A''A'$  dans le sens du rayon vecteur  $CA'$  (*fig. 1*).

Fig. 1.



1° L'effet de la rotation est de faire tourner les rayons  $CA$ ,  $CO$ ,  $CB$  de l'angle  $d\omega$ ; donc, en employant les mêmes notations que dans mon précédent Article (p. 212-215) et en désignant par  $dS$  l'arc de cercle  $OO''$ , on a

$$\rho^2 \frac{d\omega}{2} = (a^2 + c^2 - b^2) \frac{d\omega}{2} + (a + b) dS \cos \widehat{COB};$$

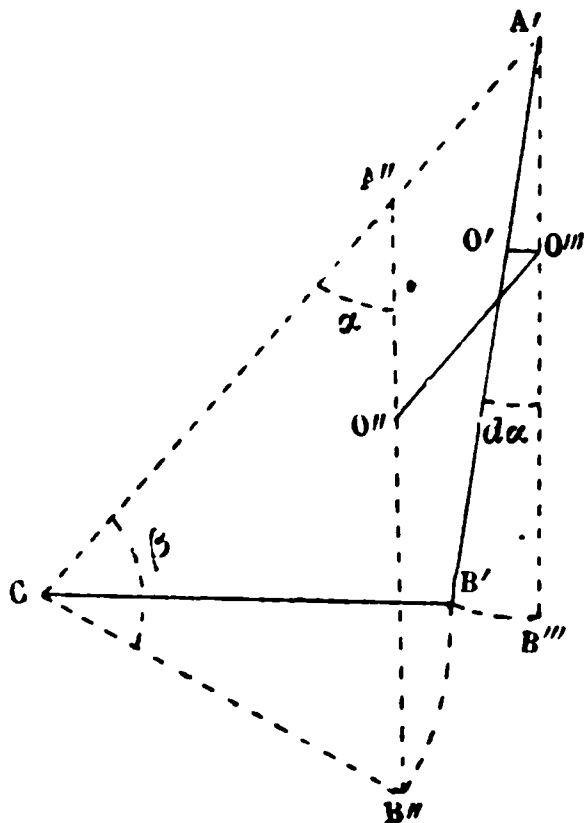
dans ce mouvement, la roulette a enregistré la quantité  $dS \cos \widehat{COB} = du$ , et l'on a

$$\rho^2 \frac{d\omega}{2} = (a^2 + c^2 - b^2) \frac{d\omega}{2} + (a + b) du.$$

2° Analysons maintenant l'effet de la translation du point  $A$  suivant  $A''A'$ . Ce mouvement peut lui-même être considéré (*fig. 2*) comme la résultante d'une translation

parallèle qui transporterait  $A''B''$  en  $A'B'''$ , suivie rotation autour de  $A'$  qui porte enfin  $A'B'''$  suivant

Fig. 2.



Dans la translation parallèle, le point  $O$  décrit la  $O''O''' = A''A'$  et la roulette enregistre un nombre à  $O''O''' \sin \widehat{O'''O''A''}$ .

Dans la rotation, le point  $O'''$  décrit l'arc  $O'''O'$  roulette indique un nombre qui est précisément la longueur de cet arc; donc l'indication totale de la roulette pour le passage de  $O''$  en  $O'$  est la somme algébrique des quantités  $O'''O'$  et  $O''O''' \sin \widehat{O'''O''A''}$ .

Désignons un instant par  $\alpha$  l'angle  $CA''B''$  et l'angle  $A''CB''$ ; l'indication totale  $d\nu$  de la roulette pour le passage de  $O''$  en  $O'$  est donc

$$d\nu = A''A' \sin \alpha + a d\alpha,$$

$d\alpha$  étant l'angle  $\widehat{B'A'B''}$ . Mais

$$\rho = CA'' = b \cos \beta + (a + c) \cos \alpha;$$

donc

$$d\rho = A''A' = -b \sin \beta d\beta - (a + c) \sin \alpha d\alpha,$$

onc

$$dv = -b \sin \beta \sin \alpha d\beta - (a + c) \sin^2 \alpha d\alpha + a d\alpha,$$

enfin, dans le triangle  $cB''A''$ , on a

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a + c}{\sin \beta};$$

donc

$$dv = -\frac{b^2}{a + c} \sin^2 \beta d\beta - (a + c) \sin^2 \alpha d\alpha + a d\alpha;$$

Par conséquent, en définitive, l'indication de la roulette pour le déplacement élémentaire du point A au point A' est la somme algébrique  $du + dv$ . L'indication totale correspondant au secteur plan CPQ, balayé par le planimètre, est par conséquent

$$\int du + \int dv = U + V,$$

avec la relation

$$\text{aire CPQ} = (a^2 + c^2 - b^2) \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} + (a + b)U.$$

Admettons maintenant qu'on fasse décrire à la pointe d'un contour *fermé* quelconque. Je dis que l'intégrale V est nulle. En effet

$$\begin{aligned} \int dv &= -\frac{b^2}{a + c} \int \sin^2 \beta d\beta \\ &\quad - (a + c) \int \sin^2 \alpha d\alpha + a \int d\alpha. \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \alpha d\alpha &= \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sin 2\alpha, \\ \int \sin^2 \beta d\beta &= \frac{1}{2} \beta - \frac{1}{4} \sin 2\beta, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int dv &= \frac{b^2}{a + c} \left( \frac{1}{4} \sin 2\beta - \frac{1}{2} \beta \right) \\ &\quad + (a + c) \left( \frac{1}{4} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \right) + a \alpha. \end{aligned}$$









la somme des moments des quatre forces par rapport à AB est nulle; il en est de même de la somme des moments des forces par rapport à AC et à BC.

Si donc l'axe du couple résultant n'est pas nul, il doit être dirigé perpendiculairement à la face ABC; mais il doit aussi être perpendiculaire aux trois autres faces du tétraèdre, ce qui est impossible. Il faut donc admettre qu'il est nul.

*Remarque.* — Le théorème que je viens de démontrer peut encore servir à démontrer le suivant, qu'on donne souvent comme exercice de Mécanique :

*Si, aux centres de gravité des faces d'un tétraèdre, on applique quatre forces perpendiculaires à ces faces et proportionnelles à leurs aires, elles se font équilibre.*

En effet, les centres de gravité des faces d'un tétraèdre sont les sommets d'un second tétraèdre homothétique au premier par rapport à son centre de gravité.

#### *Extrait d'une Lettre de M. Gambey.*

Permettez-moi d'attirer l'attention de vos lecteurs sur un mode de description des courbes du second ordre qui me semble peu connu.

Soient deux droites rectangulaires indéfinies HI, KL, qui se coupent en P. Prenons deux points fixes A et B sur la première et un point quelconque C sur la seconde. Traçons AC et BC : élevons en A une perpendiculaire sur AC qui coupe BC en M, et sur BC, au point B, une autre perpendiculaire qui coupe CA prolongée en M' : si le point C décrit la droite KL, les points M et M' décrivent deux coniques de même espèce. Cette espèce dépend des positions relatives des points A, B et P.



imaginaires et  $2c$ ,  $2c'$  les distances focales, on a les relations

$$bb' = a^2, \quad \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c'^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Supposons enfin que le point B s'éloigne indéfiniment du point A, qui reste fixe, ainsi que le point P. L'excentricité  $\sqrt{\frac{AB}{BP}}$  tend vers 1, et l'ellipse et l'hyperbole lieux des points M tendent toutes deux à se confondre en une parabole unique, dont le sommet est en A et dont l'axe est sur AB. Si l'on fait  $AB = \infty$ , et qu'on pose  $AP = 2p$ , l'équation de la parabole sera  $y^2 = \pm 2px$ , suivant que le point P sera à gauche ou à droite du point A. Dans ce cas, le point M est l'intersection de la perpendiculaire élevée en A sur AC et d'une parallèle à la droite HI menée par le point C.

Ainsi, quelle que soit l'espèce de la conique à décrire, la construction reste la même.

*P. S.* — Ce qui précède m'a été suggéré par l'examen d'un cas particulier de la question suivante :

*Soient pris deux points fixes A et B sur une ellipse. On trace par A une sécante quelconque qui coupe de nouveau l'ellipse en C, on trace BC et l'on élève en B une perpendiculaire sur BC. Cette perpendiculaire coupe AC en M : lieu de M ?*

On trouve, dans le cas général, une équation du quatrième degré, décomposable en trois facteurs, dont deux représentent la droite AB et la perpendiculaire à cette droite au point B, et l'autre une conique.

Le cas particulier est celui où les deux points A et B sont aux extrémités d'un axe. Alors la conique elle-même se change en une droite perpendiculaire sur AB.

## NOTE RELATIVE A LA QUESTION 1210

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 523 );

PAR M. V. HIOUX.

*Trouver l'enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe donnée et qui demeure tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second degré également donnée.*

La solution publiée, 2<sup>e</sup> série, t. XVI, p. 523, est très simple et très élégante, mais elle n'est pas complète.

Nous nous proposons de reprendre et d'achever la solution du problème. Établissons pour cela quelques préliminaires.

I. Si un cône du second degré a pour équation

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + \dots = 0,$$

pour que ce cône soit *capable* d'un trièdre ayant ses arêtes parallèles à trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde ayant pour demi-axes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$(1) \quad Ma^2 + Nb^2 + Pc^2 = 0 \quad (1).$$

II. Appelons (D) une déférente anallagmatique, (S) la sphère directrice de centre O et de rayon R, (P) le plan tangent au centre de la sphère variable  $\Sigma$  dont on cherche l'enveloppe.

Du point O abaissons sur le plan (P) la perpendiculaire  $O\mu'$ , qui rencontre  $\Sigma$  en  $m$  et  $m'$ , points équidi-

---

(<sup>1</sup>) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. II, p. 429.

stants de  $\mu'$ . On sait que  $m$  et  $m'$  sont les points de contact de  $\Sigma$  et de son enveloppe.

Sur  $O\mu'$ , marquons un point  $\mu$  tel que l'on ait

$$O\mu \cdot O\mu' = R^2.$$

Le point  $\mu$  étant le pôle du plan (P) par rapport à (S), le lieu du point  $\mu$  est la polaire réciproque ( $D'$ ) de ( $D$ ) par rapport à (S). Or, si l'on désigne par  $x, y, z$  les coordonnées du point  $m$ , et par  $x', y', z'$  celles du point  $\mu$ , on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{2R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}, \\ y' = \frac{2R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}, \\ z' = \frac{2R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}. \end{array} \right.$$

Ces formules sont de M. Darboux (*Annales de l'École Normale*, 1864). On peut d'ailleurs les établir comme il suit :

Les coordonnées du point  $m$  étant  $x, y, z$ , celles du point  $m'$  sont

$$\frac{R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

puisque l'on a

$$Om \cdot Om' = R^2.$$

Le plan (P), perpendiculaire sur  $Om$  et également distant de  $m$  et de  $m'$ , a pour équation

$$xX + yY + zZ = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + R^2).$$

Le même plan (P) est le plan polaire du point  $\mu(x', y', z')$  par rapport à la sphère (S), représentée par

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2.$$

On a donc encore, pour l'équation du plan (P),

$$x'X + y'Y + z'Z = R^2.$$

En identifiant ces deux équations du même plan, on obtient les formules (2).

III. Lorsque la déférente (A) est une surface du second ordre, on peut toujours supposer son équation ramenée à la forme

$$(D) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z - F = 0.$$

Alors, si l'on pose

$$H = F + \frac{C^2}{A} + \frac{C'^2}{A'} + \frac{C''^2}{A''},$$

la polaire réciproque (D') de (D) par rapport à

$$(S) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

est représentée par l'équation

$$(D') = H \left( \frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{A'} + \frac{z'^2}{A''} \right) - \left( \frac{Cx'}{A} + \frac{C'y'}{A'} + \frac{C''z'}{A''} + R^2 \right)^2 = 0.$$

L'emploi des formules (2) donne, pour l'équation de la cyclide,

$$(3) \quad \begin{cases} 4H \left( \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''} \right) \\ - \left( x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2Cx}{A} + \frac{2C'y}{A'} + \frac{2C''z}{A''} + R^2 \right)^2 = 0. \end{cases}$$

Si, dans cette équation, on pose

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

le premier membre, après suppression du facteur commun 4, devient identique à celui de (D') débarrassé des accents de  $x, y, z$ . Donc la cyclide passe par la courbe sphé-

rique d'intersection de (S) et de la polaire réciproque de la déférente par rapport à (S).

IV. Ces préliminaires posés, nous indiquerons simplement la marche de la solution.

Prenons pour axes coordonnés trois droites rectangulaires OX, OY, OZ parallèles aux axes  $2a$ ,  $2b$  et  $2c$  de l'ellipsoïde donné.

Soit  $M(\alpha, \beta, \gamma)$  le centre d'une sphère variable  $\Sigma$  coupant orthogonalement la sphère directrice

$$(S) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

L'équation de  $\Sigma$  est

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + R^2 = 0.$$

Soit  $C(x_1, y_1, z_1)$  le centre de l'ellipsoïde, et soit  $P = 0$  le plan polaire de ce point par rapport à  $\Sigma$ .

Le cône de sommet C circonscrit à  $\Sigma$  a pour équation

$$f_1 f - P^2 = 0,$$

où représentant par  $f_1$  le premier membre de  $f$  pour  $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ .

Les coefficients des termes en  $x^2, y^2$  et  $z^2$  sont

$$f_1 - (x_1 - \alpha)^2, \quad f_1 - (y_1 - \beta)^2, \quad f_1 - (z_1 - \gamma)^2.$$

En les multipliant respectivement par  $a^2, b^2$  et  $c^2$ , puis ajoutant, on doit avoir

$$(a^2 + b^2 + c^2)f_1 - a^2(x_1 - \alpha)^2 - b^2(y_1 - \beta)^2 - c^2(z_1 - \gamma)^2 = 0.$$

Cette équation représente le lieu du point M. Elle est du second degré en  $\alpha, \beta, \gamma$  et ne renferme pas les rectangles de ces variables. On est ainsi ramené au problème traité au § III.

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### Question 329

voir 1<sup>re</sup> série, t. XV, p. 303 );

PAR M. A. GENEIX-MARTIN.

*Dans une progression géométrique de quatre termes, on donne la somme des antécédents et la somme des conséquents : trouver ces termes sans opérer d'élimination.*

Voici une solution plus simple que celle qui est donnée, 1<sup>re</sup> série, t. XV, p. 303.

$a, b, c, d$  étant les quatre termes,  $q$  la raison, on a

$$b = aq, \quad c = aq^2, \quad d = aq^3;$$

on a aussi

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

et

$$a + b + c = m,$$

$$b + c + d = n,$$

$m$  et  $n$  étant des nombres donnés, d'où

$$a(1 + q + q^2) = m, \quad aq(1 + q + q^2) = n.$$

Divisant membre à membre,

$$q = \frac{n}{m}.$$



Or

$$a = \frac{m}{1 + q + q^2} = \frac{m}{1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}} = \frac{m^3}{m^2 + mn + n^2},$$

$$b = aq = \frac{m^2 n}{m^2 + mn + n^2},$$

$$c = aq^2 = \frac{mn^2}{m^2 + mn + n^2},$$

$$d = aq^3 = \frac{n^3}{m^2 + mn + n^2}.$$

## Question 1308

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 563 );

PAR M. MORET-BLANC.

Soient  $O$  un point fixe dans un plan,  $M$  un point qui se meut dans ce plan,  $MV$  la vitesse à un instant quelconque,  $MU$  l'accélération. Démontrer que l'aire du triangle  $OMU$  mesure la dérivée de l'aire variable du triangle  $OMV$  par rapport au temps.

( LAISANT. )

Soient  $S$  l'aire du triangle  $OMV$ ,  $S'$  sa dérivée par rapport au temps et  $\Delta t$  un temps très petit que nous ferois tendre vers zéro. Prenons sur  $MU$  la longueur  $MU_1 = MU \cdot \Delta t$ ; construisons le parallélogramme  $MM_1V_1U_1$  et le triangle  $MOU_1$ . On a

$$\begin{aligned} S' &= \lim \frac{OMV_1 - OMV}{\Delta t} \\ &= \lim \frac{OMU_1}{\Delta t} = \lim \frac{OMU \cdot \Delta t}{\Delta t} = OMU. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. G. Bardelli, à Milan; C. Bergmans, répétiteur à l'École du Génie civil de Gand; Krantz; L. Julliard; Lacombe, à Bar-sur-Seine; E. Fauquembergue, autre répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

## Question 1357

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 48 );

PAR M. A. AIGNAN,

Élève du lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

ABC étant un triangle donné, on joint ses sommets à un point O de son plan par des lignes droites qui déterminent sur les côtés du triangle six segments : trouver le lieu du point O pour lequel le produit de trois segments non consécutifs est constant.

( BARBARIN. )

Nous prendrons comme axes de coordonnées deux des côtés du triangle. Soit O un des points du lieu tel que les points A', B', C', obtenus en joignant O aux trois sommets et prolongeant, donnent

$$A'C \times B'A \times C'B = k \quad \text{ou} \quad mnp = k.$$

L'équation de CC' sera,  $a, b, c$  désignant les trois côtés du triangle,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{p} - 1 = 0,$$

celle de AA',

$$\frac{x}{a-m} + \frac{y}{c} - 1 = 0,$$

et les coordonnées du point O satisfont à ces deux équations.

De ces deux équations on tire

$$p = \frac{ay}{a-x}, \quad m = - \frac{cx + ay - ac}{c-y}.$$

On a du reste

$$mnp = (a-m)(b-n)(c-p),$$

D'où

$$n = \frac{(a - m)(c - p)b}{mp + (a - m)(c - p)}.$$

Remplaçant  $m$  et  $p$  par les valeurs trouvées plus haut, on obtient

$$n = \frac{bcx}{cx + ay},$$

et l'équation du lieu est

$$1) \quad -\frac{abcxy(cx + ay - ac)}{(a - x)(c - y)(cx + ay)} = k.$$

Le lieu est du troisième degré et présente trois directions asymptotiques, les directions des côtés du triangle.

Le coefficient des termes en  $x^2$ ,  $c(abcy - kc + ky)$ , égalé à zéro, donne l'asymptote parallèle à  $Ox$ ,

$$2) \quad y = \frac{kc}{abc + k}.$$

On aura de même, pour l'asymptote parallèle à  $Oy$ ,

$$3) \quad x = \frac{ka}{abc + k}.$$

Par raison de symétrie, nous aurons une troisième asymptote parallèle à  $AC$  et son équation sera

$$4) \quad x_1 = \frac{kb}{abc + k},$$

en prenant  $BC$  pour axe des  $x_1$  et  $AC$  pour axe des  $y_1$ . On voit de plus que la courbe passe par les trois sommets du triangle et que les tangentes en ces points sont parallèles aux côtés opposés.

Déterminons la forme de la courbe suivant les valeurs de  $k$ .

PREMIÈRE PARTIE :  $k > 0$ . — Pour un point pris à l'intérieur du triangle ,

$$a > x > 0, \quad c > y > 0, \quad cx + ay - ac < 0;$$

donc

$$-\frac{abcxy(cx + ay - ac)}{(a - x)(c - y)(cx + ay)} > 0.$$

On peut avoir des points du lieu à l'intérieur. Il est aisé de voir qu'il n'y en aura pas toujours.  $k$  peut varier de 0 à  $+\infty$ , et le produit des trois segments, quand  $O$  est à l'intérieur du triangle, ne peut dépasser un maximum, qui est atteint lorsque  $O$  est le centre de gravité du triangle. En effet,

$$mnp(a - m)(b - n)(c - p) = k^2$$

en valeur absolue, et ce produit sera maximum quand les produits deux à deux seront maxima, car ils le sont en même temps pour  $m = a - m, n = b - n, p = c - p$ , ce qui donne bien pour  $O$  le point de concours des médianes.

Dans ce cas,  $k = \frac{abc}{8}$ . Donc, suivant que  $k$  sera inférieur, supérieur ou égal à  $\frac{abc}{8}$ , on aura les trois dispositions du lieu (1) (2), (3).

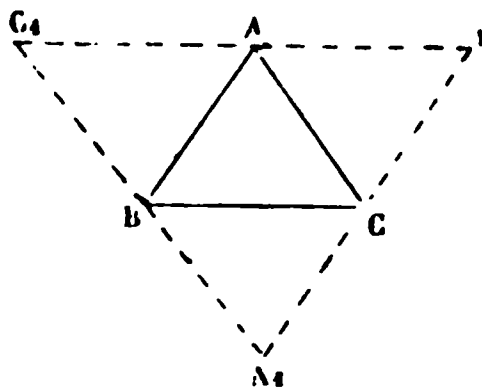
Dans le cas particulier de  $k = \frac{abc}{8}$ , le point de concours des médianes est le seul point du lieu qui soit à l'intérieur du triangle; pour  $k > \frac{abc}{8}$ , il n'y a plus de points de lieu à l'intérieur.

Si  $k$  croît au delà de toute limite, la courbe se réduit à trois droites indéfinies menées par les sommets du triangle parallèlement aux côtés opposés.

*Remarque I.* — On obtient ainsi tous les points du plan, sauf ceux qui sont compris dans les angles oppo-

sés par le sommet à ceux du triangle et ceux des trois

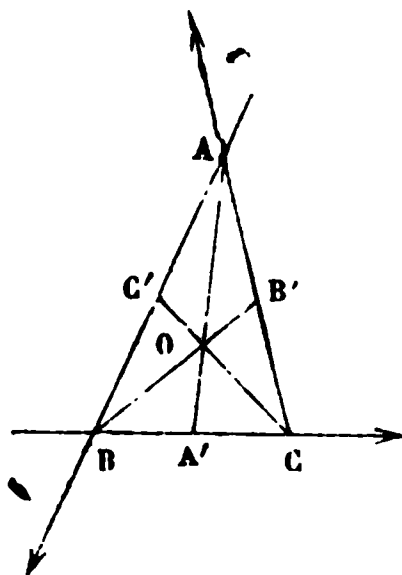
Fig. 1.



triangles  $AB_1C$ ,  $CA_1B$ ,  $BC_1A$  formés par les côtés du triangle proposé et les parallèles menées par les sommets parallèlement aux côtés opposés.

SECONDE PARTIE :  $k < 0$ . — On peut se rendre compte du double signe que doit prendre  $k$ . Nous compterons

Fig. 2.



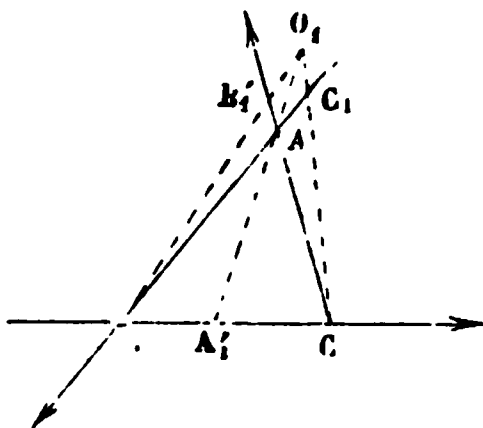
positivement les segments dans le sens des flèches.

Pour un point de l'intérieur du triangle, les trois segments  $CA'$ ,  $AB'$ ,  $BC'$  sont négatifs, leur produit est négatif, et, comme (1) donne ce produit changé de signe, dans (1), il faut  $k > 0$  pour tout point à l'intérieur du triangle ainsi que pour toutes les régions examinées dans la première Partie.

Prenons au contraire un point  $O_1$  dans une des régions qu'il nous reste à examiner.

On a les trois segments  $CA'_1$ ,  $AB'_1$ ,  $AC'_1$ , qui sont

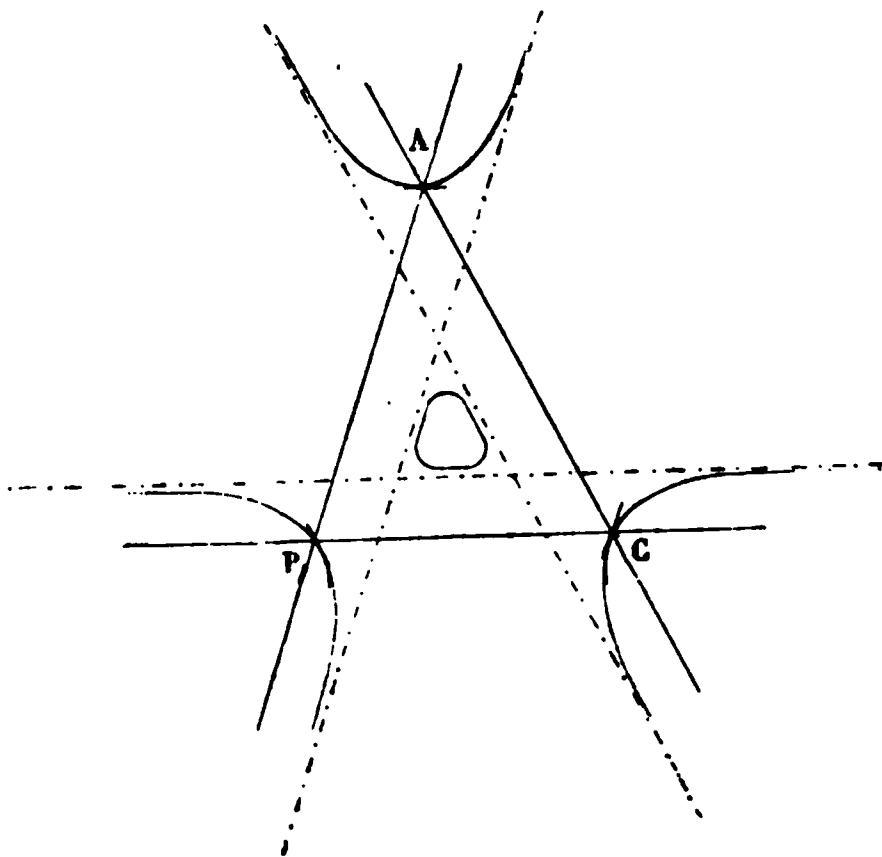
**Fig. 3.**



affectés des signes  $-$ ,  $+$ ,  $-$ . Leur produit, changé de signe, sera bien négatif, ce qui exige, dans (1),  $k < 0$ .

Cette notation du produit est arbitraire; mais, une fois que nous avons fait une hypothèse sur  $k$  pour

**Fig. 4.**



**première Partie , la discussion de la seconde s'en déduit forcément.**

Nous supposons donc  $k < 0$  et nous mettrons le signe en évidence.

On aura, pour asymptote parallèle à  $Ox$ ,

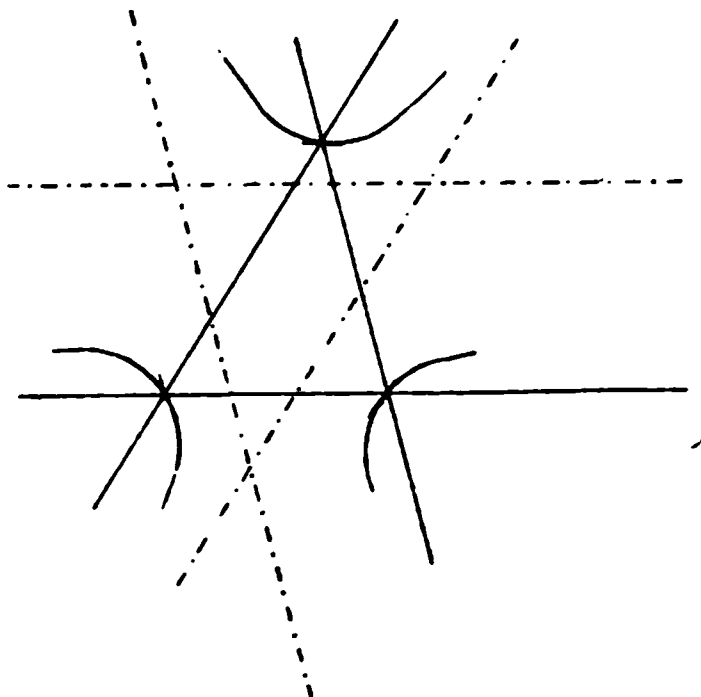
$$y = -\frac{kc}{abc - k}.$$

Les autres se déduisent de celle-là par analogie :

1° Supposons  $k < abc$ . Le lieu passe toujours par les points  $A, B, C$ , et on a la courbe représentée par la fig. 4.

2°  $k = abc$ . Les branches infinies du lieu, ainsi que

Fig. 5.



les asymptotes, se sont éloignées à l'infini dans le sens négatif.

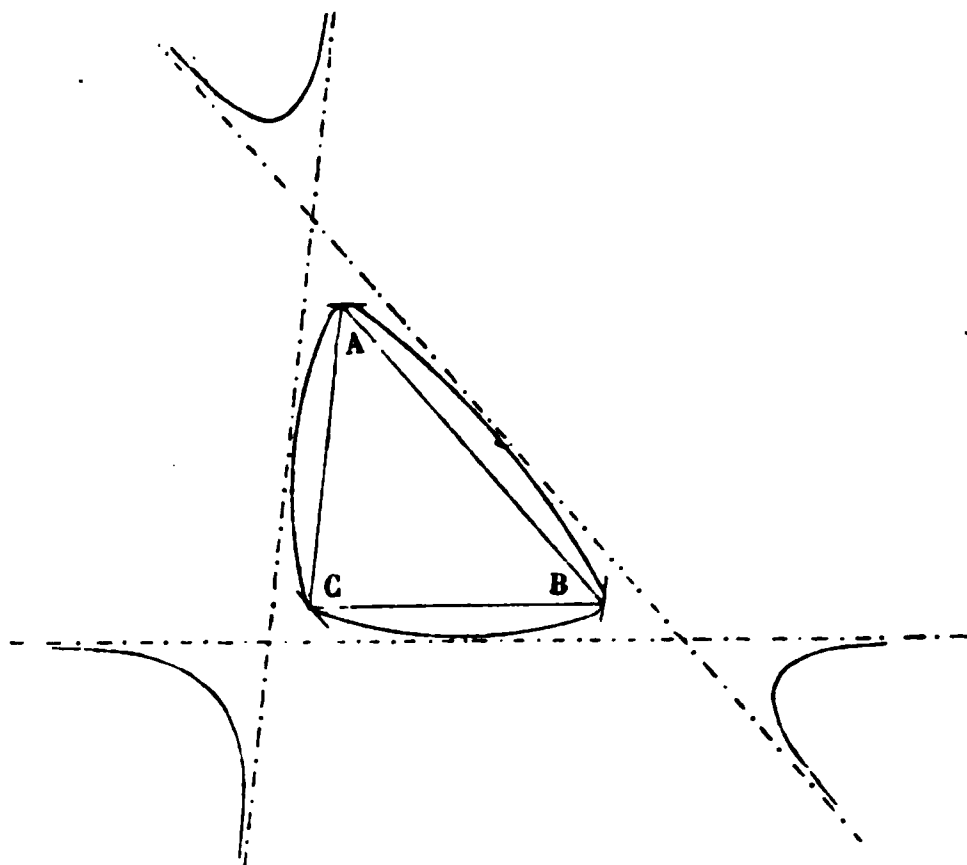
3°  $k > abc$ . Si  $k = abc + \varepsilon$ , les asymptotes passent à  $+\infty$  relativement à chaque côté, et, lorsque  $k$  décroît, elles s'approchent des sommets du triangle parallèlement aux côtés opposés.

Enfin, pour  $k$  tendant vers  $-\infty$ , les asymptotes deviennent les parallèles aux côtés du triangle, menées par les sommets opposés.

C'est le cas limite de la première Partie.

En résumé, pour  $k$  croissant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , le lieu

Fig. 6.



passé par tous les points du plan une fois, et une *fois* seulement.

*Remarque.* — Dans le cas où le lieu a une courbe à branches fermées, cette courbe n'est pas coupée par les asymptotes, car le lieu est du troisième degré et ne peut être rencontré en plus de trois points par une droite quelconque.

*Note.* -- La même question a été résolue par MM. A. Baron, élève du lycée Henri IV; A. de Vauvineux, élève du lycée de Grenoble; E. Pecquery, élève du lycée du Havre; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; L. Fulcrand, boursier à la Faculté des Sciences de Bordeaux; H. Lez et Moret-Blanc.



# DES PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DES FOYERS DES COURBES DU SECOND DEGRÉ ET SUR LA DÉTERMINATION ANALYTIQUE DE CES POINTS ;

PAR M. LE D<sup>r</sup> A. LETNIKOW,

Professeur à l'École impériale technique de Moscou.

1. Nous supposons que la courbe du second degré rapportée aux coordonnées rectilignes quelconques est représentée par l'équation générale

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Soient  $x_1, y_1$  les coordonnées inconnues d'un foyer, appelons  $\rho$  le rayon vecteur mené du foyer au point quelconque de la courbe donnée; en adoptant la définition connue des foyers indiquée par Euler, nous aurons

$$\rho = Mx + Ny + Q,$$

M, N et Q sont les coefficients à déterminer, avec la condition que la fonction linéaire représentant le rayon vecteur doit avoir la valeur positive pour tous les points de la courbe donnée.

On démontre très facilement que les foyers, comme les définit Euler, n'existent que dans les courbes du second degré.

Pour la commodité des calculs, nous représenterons dans la suite la fonction linéaire ci-dessus sous la forme

$$\rho = M(x - x_1) + N(y - y_1) + K.$$

L'équation

$$M(x - x_1) + N(y - y_1) + K = 0,$$

où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées courantes, représentera

une droite nommée *directrice* de la courbe du second degré. La distance  $\delta$  d'un point quelconque de la courbe (1) à la directrice (3) sera

$$\delta = V [M(x - x_1) + N(y - y_1) + K],$$

où

$$V = \frac{\sin \theta}{\sqrt{M^2 + N^2 - 2MN \cos \theta}},$$

$\theta$  étant l'angle des axes des coordonnées; d'ailleurs,  $V > 0$ .  
On aura donc

$$\frac{\rho}{\delta} = \frac{1}{V} = \varepsilon \quad \text{ou} \quad \rho = \varepsilon \delta,$$

où  $\varepsilon$  est une constante positive que l'on nomme *excentricité* de la courbe (1).

2. Il est évident qu'en général la directrice ne coupe pas la courbe, car autrement, pour le point d'intersection, on aurait  $\delta = 0$ , et, par conséquent,  $\rho = 0$ , et le foyer  $(x_1, y_1)$ , dans ce cas singulier, serait situé sur la courbe. Le lieu géométrique déterminé par la condition  $\rho = \varepsilon \delta$  se réduirait, dans ce cas, au système de deux droites concourantes au point foyer et formant avec la directrice de deux côtés un même angle  $\varphi$  déterminé par l'égalité  $\varepsilon = \frac{1}{\sin \varphi}$ . L'expression du rayon vecteur serait alors

$$\rho = M(x - x_1) + N(y - y_1).$$

Laissant de côté ce cas exclusif, qui ne présente pas d'intérêt, nous admettrons, dans la suite, que la directrice ne coupe pas la courbe.

3. Menons, par le foyer  $F_1, (x_1, y_1)$ , une droite parallèle à la directrice; il est évident que sur cette droite y aura deux points L et L' du lieu considéré, ces po

étant déterminés par leurs distances du foyer

$$FL = FL' = \varepsilon D,$$

où  $D$  est la distance du foyer à la directrice. La corde  $LL'$  est divisée par le point  $F$  en deux parties égales; donc son équation est

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) = 0,$$

où

$$X_1 = f'_{x_1}(x_1, y_1) \quad \text{et} \quad Y_1 = f'_{y_1}(x_1, y_1).$$

L'équation de la directrice comme parallèle à la corde  $LL'$  pourra donc s'écrire sous la forme

$$(4) \quad X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + k = 0,$$

où  $k$  est une constante inconnue. La comparaison de l'équation (4) à l'équation (3) nous donne les relations

$$M = \lambda X_1, \quad N = \lambda Y_1, \quad K = \lambda k,$$

$\lambda$  étant un facteur positif ou négatif. On aura, de plus,

$$(5) \quad \rho = \lambda [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + k].$$

Le signe de  $\lambda$  sera déterminé par la condition que  $\rho$  doit être positif.

4. Soit  $M, (x, y)$ , un point quelconque de notre courbe; menons le rayon vecteur  $FM$  et supposons qu'il coupe la courbe en un autre point  $N, (x', y')$ ; nous devons avoir

$$(6) \quad \begin{cases} FM = \lambda [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + k], \\ FN = \lambda [X_1(x' - x_1) + Y_1(y' - y_1) + k]. \end{cases}$$

L'équation de la corde  $MN$  passant par le point  $F$  est

$$(7) \quad \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = r,$$

où

$$p = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}, \quad q = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta},$$

$\alpha$  étant l'angle formé par cette droite avec l'axe des  $x$ ,  
 $r$  la distance positive ou négative de deux points  $(x, y)$   
et  $(x_1, y_1)$ , en prenant  $r > 0$  si l'on a  $y > y_1$ , et en ad-  
mettant  $r < 0$  si le point  $(x, y)$  est situé sur la droite  
considérée du côté où  $y < y_1$ . On aura d'ailleurs, comme  
on sait, cette relation entre  $p$  et  $q$  :

$$p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta = 1.$$

Supposons que le point M,  $(x, y)$ , de la courbe est  
situé sur la droite (7), du côté où  $y > y_1$ ; alors on aura

$$(8) \quad FM = \frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q}.$$

Il serait facile de faire voir que l'autre point d'inter-  
section N,  $(x', y')$ , ne pourra pas se trouver sur la  
droite (7) du même côté du point F comme le point M,  
c'est-à-dire du côté où  $y > y_1$ , car l'égalité

$$FN = \frac{x' - x_1}{p} = \frac{y' - y_1}{q}$$

nous conduirait nécessairement à la conclusion que le  
point N coïncide avec le point M. Donc, si nous considé-  
rons les points de la courbe pour lesquels le rayon vecteur  
s'exprime par la formule (5), nous devons supposer que  
l'autre point d'intersection N, s'il existe, se trouve sur la  
droite (6) du côté du point F où  $y < y_1$ , et nous au-  
rons, par conséquent,

$$(9) \quad FN = \frac{x' - x_1}{p} = \frac{y' - y_1}{q}.$$

L'élimination de  $x$  et  $y$  et de  $x'$  et  $y'$  des formules (5)  
au moyen des égalités (8) et (9) nous donne

$$\begin{aligned} FM &= \lambda [ (X_1 p + Y_1 q) FM + k ], \\ FN &= \lambda [ - (X_1 p + Y_1 q) FN + k ]. \end{aligned}$$

En éliminant ensuite  $X_1 p + Y_1 q$  entre ces deux équations, nous aurons l'expression d'un théorème connu,

$$(10) \quad \frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2}{k\lambda} = \text{const.},$$

savoir, que *la moyenne harmonique entre les deux segments déterminés par le foyer sur une corde focale est constante.*

Si d'ailleurs nous appliquons l'égalité (10) à la corde  $LL'$ , dont la longueur  $LL' = 2P$  est ce qu'on appelle le *paramètre* de la courbe, nous verrons que la constante de la dernière équation est égale à  $\frac{2}{P}$ , et, par conséquent, le demi-paramètre

$$P = k\lambda.$$

5. Maintenant nous pouvons déterminer la constante  $k$  en fonction des coordonnées du foyer.

Désignons, pour abrégé, la première partie de l'équation (1) par  $u$ ; alors, en éliminant  $x$  et  $y$  entre les équations (1) et (7), nous aurons, pour les points d'intersection de la droite (7) avec la courbe (1), l'équation

$$(11) \quad sr^2 + tr + u_1 = 0,$$

en désignant par  $u_1$  la valeur de la fonction  $u = f(x, y)$  quand on y met  $x_1$  et  $y_1$  au lieu de  $x$  et  $y$ , et en posant, pour abrégé,

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bpq + Cq^2 &= s, \\ X_1 p + Y_1 q &= t. \end{aligned}$$

Soient  $r_1$  et  $r_2$  les deux racines de l'équation (11); nous aurons

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -\frac{t}{u_1}.$$

Posons  $r_1 = FM$ ; alors  $r_2 = -FN$ , et, d'après la rela-

tion (18), nous pouvons écrire

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{2}{k\lambda}.$$

En prenant la somme des deux dernières égalités, nous trouverons

$$2k\lambda u_1 = (2u_1 - k\lambda t)r_1.$$

Mais la formule (5), jointe aux équations (7), nous donnera

$$r_1 = \lambda t r_1 + k\lambda;$$

en éliminant  $r_1$  entre cette dernière équation et la précédente, nous trouverons très facilement

$$k = 2u_1.$$

De manière que la formule (5) deviendra

$$(12) \quad \rho = \lambda[X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1],$$

et l'équation de la directrice sera

$$(13) \quad X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1 = 0.$$

D'après cette équation, on voit immédiatement que *la directrice est la polaire du foyer*.

De ce que cette droite, étant une polaire, ne coupe pas la courbe, nous concluons que son pôle, c'est-à-dire *le foyer de la courbe, se trouve du côté intérieur du plan de la courbe*, et, par suite, que du foyer on ne peut pas mener des tangentes réelles à la courbe.

6. Le théorème exprimé par la relation (10) nous conduira immédiatement aux équations qui servent à déterminer les coordonnées du foyer. En effet, l'équation (11) nous donne

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \pm \frac{\sqrt{t^2 - 4su_1}}{u_1},$$

et, d'après la relation (10), nous devons avoir

$$(14) \quad \pm \frac{\sqrt{t^2 - 4su_1}}{u_1} = \frac{2}{k\lambda} = \frac{1}{\lambda u_1} = \text{const.},$$

c'est-à-dire que cette expression ne doit pas dépendre de la direction de la corde focale considérée; autrement dit, la valeur de l'expression  $t^2 - 4su_1$  doit être indépendante de paramètres angulaires  $p$  et  $q$ , qui déterminent la direction de la corde. Mais on a

$$t^2 - 4su_1 = (X_1^2 - 4Au_1)p^2 + (Y_1^2 - 4Cu_1)q^2 + 2(X_1Y_1 - 2Bu_1)pq,$$

et nous pouvons poser

$$\frac{(X_1^2 - 4Au_1)p^2 + (Y_1^2 - 4Cu_1)q^2 + 2(X_1Y_1 - 2Bu_1)pq}{p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta} = \text{const.}$$

Cette dernière condition nous mène aux équations

$$\frac{X_1^2 - 4Au_1}{1} = \frac{Y_1^2 - 4Cu_1}{1} = \frac{X_1Y_1 - 2Bu_1}{\cos \theta},$$

qui peuvent s'écrire sous la forme

$$(15) \quad \begin{cases} X_1^2 - Y_1^2 = 4(A - C)u_1, \\ X_1Y_1 - 2Bu_1 = (X_1^2 - 4Au_1) \cos \theta, \end{cases}$$

et sont les équations connues qui déterminent les coordonnées d'un foyer de la courbe du second degré (1). Nous aurons d'ailleurs, d'après l'équation (14),

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}},$$

et, par conséquent, le demi-paramètre  $P$  se déterminera par la formule

$$(16) \quad P = \frac{2u_1}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}}.$$

Ainsi, le paramètre de la courbe (1), l'expression du rayon vecteur (12) et l'équation de la directrice correspondante seront complètement connus si nous déterminons les coordonnées du foyer au moyen des équations (15).

7. En éliminant  $u_1$  entre les deux équations (15), nous trouverons

$$(B - 2C \cos \theta) X_1^2 - 2(A - C) X_1 Y_1 - (B - 2A \cos \theta) Y_1^2 = 0,$$

et cette équation représente, comme l'on sait, les axes de la courbe du second degré : donc *les foyers se trouvent sur les axes de la courbe*.

Dans le cas de la parabole, on a  $B^2 - 4AC = 0$ , et si, au moyen de cette condition, on élimine  $A$  de la dernière équation, on trouve sans difficulté que le premier membre se décompose en produit de deux facteurs linéaires, de manière que l'équation considérée peut se représenter sous la forme

$$[(2C \cos \theta - B) X_1 + (B \cos \theta - 2C) Y_1] (2C X_1 - B Y_1) = 0,$$

et, comme pour le cas de la parabole le facteur

$$2C X_1 - B Y_1 = 2CD - BE,$$

et, par suite, est une constante qui n'est pas égale à zéro, l'équation des axes se réduira à

$$(17) \quad (2C \cos \theta - B) X_1 + (B \cos \theta - 2C) Y_1 = 0,$$

c'est-à-dire à une équation du premier degré qui représente l'axe de la parabole, le seul qui existe et sur lequel sera situé le foyer cherché.

Les conclusions de ce paragraphe résultent aussi directement de la propriété de la courbe exprimée par la relation ci-dessus  $\rho = \epsilon \delta$ , d'après laquelle on reconnaît très facilement que tous les points du lieu considéré sont



disposés symétriquement par rapport à la droite menée par le foyer perpendiculairement à la directrice; donc *le foyer est situé sur un axe de la courbe perpendiculaire à la directrice.*

8. Passons maintenant au calcul des coordonnées du foyer, et considérons d'abord les courbes ayant un centre. Comme le foyer est situé sur un axe, ses coordonnées  $x_1$  et  $y_1$  doivent satisfaire à l'équation d'un axe, et l'on aura

$$(18) \quad y_1 - \beta = \mu(x_1 - \alpha),$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coordonnées connues du centre de la courbe et  $\mu$  est le coefficient angulaire d'un des axes, ce coefficient étant une des deux racines de l'équation connue

$$(19) \quad (B - 2C \cos \theta) \mu^2 + 2(A - C) \mu - (B - 2A \cos \theta) = 0.$$

De cette manière, les coordonnées du foyer se déterminent par la résolution d'une des équations (15), combinée avec l'équation (18). Pour abréger le calcul, nous prendrons pour inconnues

$$x_1 - \alpha = x' \quad \text{et} \quad y_1 - \beta = y',$$

$x'$  et  $y'$  étant les coordonnées du foyer par rapport aux axes des coordonnées menées par le centre, parallèlement aux axes primitifs. L'introduction de ces inconnues nous donne

$$X_1 = 2A x' + B y',$$

$$Y_1 = B x' + 2C y',$$

$$u_1 = u_0 + A x'^2 + B x' y' + C y'^2,$$

où  $u_0$  désigne la valeur de la fonction  $u$  quand on y change  $x$  et  $y$  en  $\alpha$  et  $\beta$ .

Les équations (15) deviendront

$$(20) \quad \begin{cases} x'^2 - y'^2 + \frac{4(A - C)u_0}{B^2 - 4AC} = 0, \\ x'y' + \cos\theta y'^2 + \frac{H(B - 2A \cos\theta)}{B^2 - 4AC} = 0, \end{cases}$$

où

$$H = \frac{AE^2 + CD^2 - BDE + F(B^2 - 4AC)}{B^2 - 4AC} = u_0.$$

L'équation (18) s'écrira

$$y' = \mu x'.$$

Cette équation, combinée avec la première des équations (20), nous donnera

$$(21) \quad \begin{cases} x'^2 = \frac{4(A - C)u_0}{B^2 - 4AC} \frac{1}{1 - \mu^2}, \\ y'^2 = -\frac{4(A - C)u_0}{B^2 - 4AC} \frac{\mu^2}{1 - \mu^2}. \end{cases}$$

La constante  $\mu$  pourra admettre ici deux valeurs différentes, et, par conséquent, on aura deux couples de valeurs correspondantes de  $x'$  et de  $y'$ . On aura ainsi quatre foyers situés, par deux, sur les deux axes de la courbe et disposés symétriquement par rapport au centre. Mais il nous sera facile de faire voir que deux de ces foyers seront imaginaires et qu'il n'y aura que deux foyers réels, situés sur un même axe et éloignés à des distances égales du centre de la courbe.

En effet, soient  $\mu$  et  $\mu'$  les deux racines de l'équation (19), et appelons  $x'_1$  la valeur de  $x'$  correspondante à la racine  $\mu'$ ; on aura

$$x_1'^2 = -\frac{4(A - C)u_0}{B^2 - 4AC} \frac{1}{1 - \mu'^2},$$

et, par conséquent,

$$x'^2 x_1'^2 = \frac{\nu^2}{1 + \mu^2 \mu'^2 - \mu^2 - \mu'^2},$$

où  $\nu = -\frac{4(A - C)u_0}{B^2 - 4AC}$ . Mais la condition de la perpendicularité de deux axes nous donne

$$1 + \mu\mu' + (\mu + \mu') \cos \theta = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\mu^2 + \mu'^2 = \frac{1 + 2 \sin^2 \theta \mu\mu' + \mu^2 \mu'^2}{\cos^2 \theta},$$

et l'on trouvera ensuite

$$1 + \mu^2 \mu'^2 - \mu^2 - \mu'^2 = -(1 + \mu\mu')^2 \tan^2 \theta.$$

On aura donc

$$x'^2 x_1'^2 = -\nu^2 (1 + \mu\mu')^2 \tan^2 \theta,$$

d'où l'on conclut que, des deux valeurs  $x'^2$  et  $x_1'^2$ , l'une est positive et l'autre négative. Si les axes de coordonnées étaient rectangulaires, on tirerait la même conclusion de ce que l'on aurait dans ce cas

$$x'^2 x_1'^2 = -\frac{\nu^2}{(\mu + \mu')^2}.$$

On voit par cela que l'on aura deux valeurs réelles égales et de signes contraires pour  $x'$  et de même pour  $y'$ , et que les deux autres valeurs de  $x'$  et de  $y'$  seront imaginaires. Ainsi, *dans les courbes du second degré ayant un centre, il n'y aura que deux foyers réels se trouvant sur un axe de la courbe et disposés symétriquement par rapport au centre.*

Dans le cas de la parabole, il est très facile de voir que chacune des équations (15) se réduit à une équation du premier degré par rapport aux coordonnées  $x_1$  et  $y_1$ .

Ces deux équations, ou l'une d'elles combinée avec l'équation de l'axe (17), nous donneront les coordonnées du foyer. Nous n'effectuerons pas ces calculs, qui sont d'ailleurs développés partout.

9. Il nous sera facile maintenant de manifester les propriétés principales des rayons vecteurs menés de deux foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole à un point quelconque de la courbe.

Considérons d'abord une ellipse. Soient  $O$  son centre,  $F_1$  et  $F_2$  ses deux foyers; la droite qui les joint est l'axe focal. Dans ce cas le centre de la courbe se trouve, comme on sait, dans la partie intérieure du plan de la courbe, de même que les deux foyers  $F_1$  et  $F_2$ . La directrice correspondante au foyer  $F_1$ , étant la polaire de ce point, se trouve tout entière dans la partie extérieure du plan de la courbe, et elle est perpendiculaire à l'axe focal. La directrice correspondante à l'autre foyer aura une situation analogue par rapport à ce foyer, et elle sera symétriquement placée avec la première directrice par rapport au centre de la courbe. Soit  $M(x, y)$  un point quelconque de la courbe; on aura, d'après la formule (15),

$$F_1 M = \rho_1 = \lambda_1 [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1],$$

où

$$\lambda_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{X_1^2 - 4A u_1}}.$$

La même formule nous donne, pour l'autre rayon vecteur, l'expression

$$F_2 M = \rho_2 = \lambda_2 [X_2(x - x_2) + Y_2(y - y_2) + 2u_2],$$

où  $x_2$  et  $y_2$  sont les coordonnées du foyer  $F_2$ , et  $\lambda_2, X_2, Y_2, u_2$  désignent ce que deviennent  $\lambda_1, X_1, Y_1, u_1$  quand on change, dans ces expressions,  $x_1$  et  $y_1$  en  $x_2$  et  $y_2$ .

L'équation de la directrice correspondante au foyer  $F_1$  est

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1 = 0,$$

Pour  $x = x_1$  et  $y = y_1$ , le premier membre de cette équation se réduit à  $2u_1$ ; mais, comme un point quelconque  $M$  de la courbe est situé, il est évident, du même côté de la directrice que le foyer  $F_1$ , nous devons conclure que l'expression

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1$$

pour tous les points de la courbe aura le même signe que  $u_1$ , et, par conséquent, dans l'expression donnée plus haut pour le rayon vecteur  $\rho_1$ , le signe de  $\lambda_1$  doit être le même que le signe de  $u_1$ . Des considérations analogues nous amènent à conclure que, dans l'expression du rayon vecteur  $\rho_2$ , le facteur  $\lambda_2$  doit être pris avec le même signe que  $u_2$ . D'ailleurs, comme on a

$$x_1 = \alpha + x', \quad y_1 = \beta + y',$$

$$x_2 = \alpha - x', \quad y_2 = \beta - y',$$

$$u_1 = f(\alpha + x', \beta + y') = u_0 + Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2,$$

$$u_2 = f(\alpha - x', \beta - y') = u_0 + Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2,$$

nous aurons  $u_1 = u_2$ , et les facteurs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , dans les expressions de  $\rho_1$  et de  $\rho_2$ , auront le même signe. D'un autre côté, on aura

$$X_2 = -(2Ax' + By') = -X_1,$$

$$Y_2 = -(Bx' + 2Cy') = -Y_1,$$

d'où il suit que  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Par conséquent, en ajoutant ces deux expressions de  $\rho_1$  et de  $\rho_2$ , on trouvera

$$\rho_1 + \rho_2 = 2\lambda_1(-X_1x' - Y_1y' + 2u_1).$$

Mais, d'après un calcul immédiat, on a

$$-X_1x' - Y_1y' + 2u_1 = 2u_0,$$

et enfin

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{4u_0}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}} = \text{const.}$$

Cette égalité, exprimant la propriété fondamentale des rayons vecteurs menés de deux foyers d'une ellipse à un point quelconque de la courbe, nous donne aussi la longueur de l'axe focal de l'ellipse.

Passons à l'hyperbole. Dans ce cas, le centre de la courbe est situé, comme on sait, dans la partie du plan extérieure à la courbe, les foyers se trouvant toujours dans la partie intérieure; d'ailleurs, l'axe focal est l'axe transverse de la courbe. Le centre et le foyer se trouvent ici de deux côtés différents de la directrice correspondante au foyer considéré. En effet, si nous prenons l'équation de la directrice correspondante au foyer  $F_1$ ,

$$X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1 = 0;$$

alors la substitution des coordonnées du foyer  $x_1$  et  $y_1$  au lieu de  $x$  et de  $y$ , dans le premier membre de cette équation, nous donne  $2u_1$ , tandis que si nous mettons, au lieu de  $x$  et de  $y$ , les coordonnées du centre  $\alpha$  et  $\beta$ , nous verrons que le premier membre de cette équation se réduit à

$$X_1(\alpha - x_1) + Y_1(\beta - y_1) + 2u_1 = 2u_0;$$

mais, dans le cas de l'hyperbole,  $u_1$  et  $u_0$  ont des signes différents.

Les valeurs des rayons vecteurs menés de deux foyers  $F_1$  et  $F_2$ , au point  $M(x, y)$  de la courbe, seront ici

$$F_1M = \rho_1 = \lambda_1[X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) + 2u_1],$$

$$F_2M = \rho_2 = \lambda_2[X_2(x - x_2) + Y_2(y - y_2) + 2u_2].$$

Si le point  $M$  est pris sur la branche de la courbe voisine du foyer  $F_1$ , alors il est évident que les deux points

M et  $F_1$  se trouvent d'un même côté de la directrice correspondante au foyer  $F_1$ , et par conséquent le facteur  $\lambda_1$  aura le même signe que  $u_1$ . Au contraire, le point M et le foyer  $F_2$  se trouveront évidemment de deux côtés différents de la directrice correspondante au foyer  $F_1$ , et, par conséquent,  $\lambda_2$  et  $u_2$  ont des signes contraires. Mais ici, comme dans le cas de l'ellipse, on aura

$$X_2 = -X_1, \quad Y_2 = -Y_1, \quad u_2 = u_1, \quad \lambda_2 = -\lambda_1.$$

Donc

$$\rho_2 = \lambda_1 [X_1(x - x_1) + Y_1(y - y_1) - 2u_1].$$

En prenant la différence des deux expressions de  $\rho_1$  et de  $\rho_2$ , nous trouverons

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{4u_0}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}} = \text{const.},$$

où le radical aura le signe opposé au signe de  $u_0$ .

La dernière égalité, exprimant la propriété fondamentale des rayons vecteurs menés des deux foyers de l'hyperbole à un point quelconque de la courbe, nous donne aussi la longueur de l'axe focal.

10. Pour conclusion, nous donnerons une formule très simple, qui peut servir à calculer l'excentricité de la courbe.

Supposons que l'axe focal coupe la courbe en deux points (sommets)  $A_1$  et  $A_2$ , dont le premier est situé entre le foyer  $F_1$  et le point D d'intersection de l'axe focal et de la directrice correspondante au foyer  $F_1$ . En posant  $A_1F_1 = f$  et  $A_1D = d$ , nous aurons

$$P = \varepsilon(f + d),$$

où  $P$  est le demi-paramètre. La même condition  $\rho = \varepsilon\delta$ , appliquée au point  $A_2$ , nous donnera

$$2a - f = \varepsilon(2a + f),$$

où  $2a = A_1 A_2$  est la longueur de l'axe focal. Remarquons, d'ailleurs, que l'on a

$$f = \varepsilon d.$$

En éliminant ensuite  $f$  et  $d$  entre ces trois équations, nous trouverons

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{p}{a}.$$

Mais nous avons vu plus haut que, pour l'ellipse et pour l'hyperbole, on a la même expression de la longueur du demi-axe focal, savoir

$$a = \frac{2u_0}{\sqrt{X_1^2 - 4Au_1}}.$$

Par conséquent, en vertu de la formule (16), nous aurons

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{u_1}{u_0}.$$

D'après cette formule, nous pouvons calculer la valeur de l'excentricité  $\varepsilon$  en fonction des coordonnées  $x_1$  et  $y_1$  d'un foyer  $F_1$ .

Pour une ellipse, les valeurs  $u_1$  et  $u_0$  ont le même signe et, par suite,  $\varepsilon$  est moindre que l'unité; pour une hyperbole, au contraire, ces deux valeurs ont des signes différents et, par conséquent,  $\varepsilon$  est plus grand que l'unité.

Dans le cas de la parabole, les coordonnées du centre sont infinies et, par suite, on a  $u_0 = \infty$  et l'excentricité  $\varepsilon = 1$ .

Du reste, la valeur de l'excentricité pour une parabole résulte directement de ce que, le second point d'intersection de l'axe focal et de la courbe étant éloigné à l'infini, son conjugué harmonique  $A_1$  doit se trouver au milieu de la distance  $F_1 D$ ; donc  $A_1 F_1 = A_1 D$  ou  $f = d$ , et, par suite,  $\varepsilon = 1$ . Pour tous les points de la parabole on aura donc  $\rho = \delta$ .



## NOTE DE GÉOMÉTRIE ;

PAR M. A. DROZ.

Dans l'*Aperçu historique*, Chasles cite le théorème suivant :

*Le plan tangent et la normale en un point P d'une surface du second degré coupent un des plans diamétraux de la surface suivant une droite et un point tels, que le point est le pôle de la droite par rapport à la conique focale contenue dans le plan.*

La démonstration analytique est bien simple.

Soit  $\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 1$  l'équation d'une surface du second degré à centre.

Le plan tangent au point  $(x', y', z')$  de la surface aura pour équation

$$\frac{xx'}{L} + \frac{yy'}{M} + \frac{zz'}{N} = 1.$$

Ce plan coupe le plan des  $xy$  suivant une droite qui aura pour équations

$$(1) \quad z = 0, \quad \frac{xx'}{L} + \frac{yy'}{M} = 1.$$

Équations de la normale en  $(x', y', z')$  :

$$\frac{L}{x'} (x - x') = \frac{N}{z'} (z - z'),$$

$$\frac{M}{y'} (y - y') = \frac{N}{z'} (z - z').$$

Cette ligne coupe le plan des  $xy$  en un point, dont



Si du point  $\pi$  on abaisse une perpendiculaire sur le plan  $P$ , on pourra mener par cette droite deux plans tangents à la surface  $S$  en des points de  $C_2$ , et les normales en ces points sont dans le plan  $P$ .

Donc, il y a sur le plan  $P$  trois points par lesquels passent deux des génératrices de  $S_4$ . On en déduit qu'il y a sur  $S_4$  une courbe  $C_3$  du troisième degré, par chaque point de laquelle passent deux des normales de  $S$ .  $C_3$  est, pour cette raison, une courbe double du troisième degré sur  $S_4$ .

Un plan quelconque coupe donc  $S_4$  suivant une courbe du quatrième degré ayant trois points doubles.

Chaque plan passant par une normale coupe la surface suivant une courbe du troisième degré avec un point double.

Chaque plan contenant deux normales coupe encore  $S_4$  suivant une conique.

## CONCOURS GÉNÉRAL DE 1879

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 174 ).

### RHÉTORIQUE.

PAR M. A. LEINEKUGEL.

*Soit AB une portion de droite de longueur donnée; on prend entre A et B, sur la droite AB, un point C, et sur AC comme diamètre on décrit une demi-circonférence; par le point B on mène une tangente à cette demi-circonférence; soit D le point de contact, et soit E le point où cette tangente rencontre la perpendiculaire menée à la droite AB par le point A :*



il s'ensuit

$$BE = \frac{l(l-x)}{\sqrt{l(l-2x)}}, \quad AE = \frac{lx}{\sqrt{l(l-2x)}},$$

d'où

$$(3) \quad BE \cdot AE = \frac{lx(l-x)}{l-2x}.$$

En remplaçant, dans l'équation (1), AH et BE.AE par les valeurs obtenues (2) et (3), il vient

$$\frac{2lx^2}{l-x} = m \frac{lx(l-x)}{l-2x},$$

et, en réduisant,

$$(4) \quad x^2(m+4) - 2l(m+1)x + ml^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation, c'est-à-dire de la possibilité du problème proposé, est

$$m \leq \frac{1}{2}.$$

Dans le cas particulier de  $m = \frac{1}{2}$ , les deux racines sont égales à  $\frac{l}{3}$ , et la valeur de AH devient

$$\frac{l \frac{l}{3}}{l - \frac{l}{3}} = \frac{l}{2} = \frac{AB}{2}.$$

Le point H étant alors au milieu de AB, on a

$$HD = \frac{1}{2} AE, \quad BD = \frac{1}{2} BE;$$

il en résulte

$$\frac{\text{surf BD}}{\text{surf BE}} = \frac{1}{4},$$

et, par conséquent, le rapport des surfaces engendrées



BMA est le supplément de l'angle droit DAM; donc l'angle BMA est droit, et, par conséquent, le lieu du point M est la circonférence décrite sur AB comme diamètre.

2° On sait que la droite menée du point C de rencontre des côtés AB, A'B' non parallèles d'un trapèze au point M d'intersection des diagonales passe par les milieux E, F des bases AA', BB'. La droite PQ, étant parallèle aux bases AA' et BB', sera divisée en deux parties égales par la droite CEF; donc M est le milieu de PQ.

3° Soit O le centre de la circonférence décrite sur AB comme diamètre; les droites MO, MF étant menées du sommet M de l'angle droit des triangles rectangles AMB, BMB' aux milieux O, F des hypoténuses AB, BB', on a

$$\widehat{OMB} = \widehat{OBM} \quad \text{et} \quad \widehat{FMB} = \widehat{FBM};$$

il s'ensuit

$$\widehat{OMB} + \widehat{FMB} = \widehat{OBM} + \widehat{FBM}$$

ou

$$\widehat{OMF} = \widehat{OBF}.$$

Donc l'angle OMF ou OMC est droit, et, par conséquent, la tangente au point M à la circonférence que décrit ce point passe par le point C.

**DEUXIÈME QUESTION.** — *Soit a la longueur du côté d'un triangle équilatéral ABC : calculer la distance du point A à un point M situé sur AB, entre A et B, de façon que, si l'on désigne par P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés AC, BC du triangle, le rapport de l'aire du quadrilatère APQB à l'aire du triangle ABC soit égal à un nombre donné m.*

*Indiquer les conditions de possibilité; appliquer en*

supposant  $m = \frac{15}{32}$ , et, dans ce cas, déterminer par une construction géométrique la position du point M.

En désignant par  $x$  la distance cherchée AM, on voit facilement que, les angles MAP, MBQ étant de  $60^\circ$ , on a

$$AP = \frac{AM}{2} = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad BQ = \frac{BM}{2} = \frac{a - x}{2}.$$

Si l'on abaisse des points B et Q des perpendiculaires BH, QR sur AC, la similitude des triangles QCR, BCH donnera

$$\frac{QR}{QC} = \frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où

$$\begin{cases} QR = QC \frac{\sqrt{3}}{2} = (BC - BQ) \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = \left[ a - \left( \frac{a - x}{2} \right) \right] \frac{\sqrt{3}}{2} = (a + x) \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

D'autre part,

$$PC = AC - AP = a - \frac{x}{2}.$$

Ainsi, l'aire du triangle PQC, ou  $\frac{PC \cdot QR}{2}$ , a pour valeur

$$\frac{1}{2} \left( a - \frac{x}{2} \right) (a + x) \frac{\sqrt{3}}{4}; \quad \text{ou} \quad (2a - x)(a + x) \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

Or, le quadrilatère APQB s'obtient en retranchant du triangle ABC le triangle PQC; donc l'aire

$$APQB = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - (2a - x)(a + x) \frac{\sqrt{3}}{16} = (x^2 - ax + 2a^2) \frac{\sqrt{3}}{16}$$



et le rapport  $\frac{APQB}{ABC}$  a pour expression

$$\frac{x^2 - ax + 2a^2}{4a^2}.$$

Donc, d'après l'énoncé,

$$\frac{x^2 - ax + 2a^2}{4a^2} = m$$

ou

$$(1) \quad x^2 - ax + 2a^2(1 - 2m) = 0.$$

Cette équation donne

$$x = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{16m - 7}).$$

Pour  $m < \frac{7}{16}$ , les deux racines de l'équation sont imaginaires ; si  $m = \frac{7}{16}$ , les deux racines sont égales à  $\frac{a}{2}$  ; le point M est alors le milieu de AB.

Lorsque  $m$  est compris entre  $\frac{7}{16}$  et  $\frac{1}{2}$ , les deux racines sont réelles, positives et moindres que  $a$  ou AB. Pour  $m = \frac{15}{32}$ , par exemple,  $x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  les valeurs de  $x$  ou de AM sont, dans ce cas particulier, égales à la moitié du côté AB du triangle équilatéral, augmenté ou diminué du quart de la diagonale du carré construit sur ce côté.

Si  $m = \frac{1}{2}$ , on a

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = a.$$

Pour  $m > \frac{1}{2}$ , l'une des deux racines de l'équation (1) est négative ; l'autre est positive, mais plus grande que le côté  $a$  du triangle équilatéral. Ainsi, la question n'admet aucune solution lorsque le nombre donné  $m$  est égal à

$\frac{1}{2}$  ou plus grand que  $\frac{1}{2}$ ; elle est, de même, impossible quand  $m$  est moindre que  $\frac{7}{16}$ .

*Note.* -- Solution analogue de M. Leinekugel.

## CONCOURS GÉNÉRAL DE 1880

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 135 ).

### PHILOSOPHIE.

PAR M. MORET-BLANC.

*La Terre étant supposée sphérique, on considère le point M de la surface dont la latitude est égale à la longitude :*

1<sup>o</sup> *Déterminer le lieu des projections M sur le plan de l'équateur ;*

2<sup>o</sup> *Déterminer le lieu des droites AM, A étant le point de l'équateur à partir duquel on compte les longitudes.*

Soient O le centre de la Terre et B le point où le demi-méridien de M coupe l'équateur.

1<sup>o</sup> Les arcs MB, AB étant égaux, les points M et A se projettent au même point  $m$  sur l'intersection OB des plans de l'équateur et du méridien de M. Le point  $m$  est la projection de M sur le plan de l'équateur. L'angle  $AmO$  étant droit, le lieu du point  $m$  est la circonférence décrite sur AO comme diamètre.

2<sup>o</sup> Le triangle  $AmM$  étant rectangle en  $m$  et de plus isoscèle, l'angle  $MAm$  de la droite AM et de sa projection  $Am$  sur le plan de l'équateur est de  $45^\circ$ . Par suite, la droite AM fait, de même, un angle de  $45^\circ$  avec la per-

perpendiculaire AC, élevée en A au plan de l'équateur. La droite AM appartient donc à la surface d'un cône de révolution ayant A pour sommet et AC pour axe, et dont les génératrices font avec l'axe un angle de  $45^\circ$ . Le lieu de la droite AM est la partie de la surface de ce cône qui est, par rapport au plan tangent à la sphère en A, située du même côté que la sphère.

---

RHÉTORIQUE.

PAR M. MORET-BLANC.

---

*Aux deux extrémités A et B du diamètre AB d'un demi-cercle, on lui mène deux tangentes; on construit ensuite une troisième tangente qui coupe les deux premières aux points C et D. On demande de déterminer cette troisième tangente de manière que le volume engendré par le trapèze ABDC en tournant autour du diamètre AB, et la sphère engendrée par la révolution du demi-cercle autour de son diamètre, soient entre eux dans le rapport de m à 1. Discussion.*

Soient O le centre du demi-cercle, R son rayon et E le point de contact de la tangente CD. Posons

$$AC = x, \quad BD = y.$$

Le trapèze ABDC, en tournant autour de AB, engendre un tronc de cône dont le volume a pour expression

$$\frac{2}{3} \pi R (x^2 + y^2 + xy),$$

et l'on a

$$\frac{2}{3} \pi R (x^2 + y^2 + xy) = \frac{4}{3} \pi m R^3$$

ou

$$(1) \quad x^2 + y^2 + xy = 2mR^2.$$

Les lignes OC, OD étant les bissectrices des angles supplémentaires DCA, CDB, la somme des angles OCD et ODC égale un droit, et, par suite, l'angle COD est droit. D'ailleurs

$$AC = CE = x, \quad DE = y.$$

Le triangle rectangle COD donne

$$(2) \quad xy = R^2.$$

En combinant les équations (1) et (2), on a

$$(x + y)^2 = (2m + 1)R^2,$$

$$(x - y)^2 = (2m - 3)R^2,$$

d'où

$$x = \frac{R [\sqrt{2m + 1} + \sqrt{2m - 3}]}{2},$$

$$y = \frac{R [\sqrt{2m + 1} - \sqrt{2m - 3}]}{2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait

$$m \geq \frac{3}{2}.$$

Dans le cas du minimum,

$$m = \frac{3}{2}, \quad x = y = R.$$

Le tronc de cône se réduit au cylindre circonscrit à la sphère.

## SECONDE.

PAR UN ABONNÉ.

*Sur le côté BC d'un triangle ABC, ou sur son prolongement, on prend un point arbitraire D, et l'on fait passer deux circonférences, l'une par les points A, B, D, l'autre par les points A, C, D; soient O, O' les centres de ces circonférences. On propose :*

*1° De démontrer que le rapport des rayons de ces deux circonférences est indépendant de la position du point D sur le côté BC;*

*2° De déterminer la position que doit occuper le point D pour que les deux rayons aient la plus petite valeur possible ;*

*3° De démontrer que le triangle AOO' est semblable au triangle ABC;*

*4° De trouver le lieu décrit par le point M qui partage la droite OO' dans le rapport de deux longueurs données m, n; on examinera le cas particulier où le point M est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur OO'.*

La droite OO' étant perpendiculaire à AD en son milieu d, les angles AOd, ABD ont chacun pour mesure la moitié de l'arc AD de la circonférence O, et les angles AO'd, ACd ont pour mesure la moitié de l'arc AD de la circonférence O'; donc

$$\widehat{AOO'} = \widehat{ABC} \quad \text{et} \quad \widehat{AO'O} = \widehat{ACB},$$

où

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{AB}{AC},$$

et, par conséquent:

1° Le rapport des rayons AO, AO' des circonférences

O, O' est indépendant de la position du point D sur le côté BC.

2° Les angles des triangles rectangles  $AdO$ ,  $AdO'$  étant invariables, il en est de même des rapports

$$\frac{AO}{Ad}, \quad \frac{AO'}{Ad};$$

il s'ensuit que les plus petites valeurs des rayons  $AO$ ,  $AO'$  correspondent au minimum de  $Ad$  ou de  $AD$ ; le minimum de  $AD$  est la perpendiculaire abaissée du point A sur BC. Les centres O, O' coïncident alors avec les milieux  $b, c$  des côtés AB, AC, et les rayons  $AO$ ,  $AO'$  des circonférences O, O' ont pour valeurs

$$\frac{AB}{2}, \quad \frac{AC}{2}.$$

3° Le triangle  $AOO'$  est semblable au triangle ABC, puisque les angles  $AOO'$ ,  $AO'O$  sont égaux respectivement aux angles ABC, ACB.

4° Soit  $m$  le point qui partage la droite  $bc$  dans le rapport donné de OM à MO'; les triangles  $bAm$ , OAM seront semblables, et l'on aura

$$\widehat{bAm} = \widehat{OAM} \quad \text{et} \quad \frac{Ab}{Am} = \frac{AO}{AM}.$$

Il en résulte que les triangles  $bAO$ ,  $mAM$  sont, de même, semblables. En effet

$$\widehat{bAO} = \widehat{mAM},$$

parce que ces angles sont égaux aux angles  $bAm$ , OAM, augmentés ou diminués, tous deux, de l'angle OAm. De plus, l'égalité

$$\frac{Ab}{Am} = \frac{AO}{AM}$$

donne

$$\frac{Ab}{AO} = \frac{Am}{AM};$$

donc les triangles  $bAO$ ,  $mAM$  sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels. Mais le triangle  $bAO$  est rectangle en  $b$ ; donc l'angle  $AmM$  est droit. Par conséquent, le lieu géométrique du point  $M$  est la perpendiculaire menée à la droite  $Am$ , au point  $m$ .

Lorsque  $AM$  est perpendiculaire sur  $OO'$ , la droite  $bc$  est perpendiculaire à  $Am$ , puisque les triangles  $bAm$ ,  $OAM$  sont semblables, et, dans ce cas, le lieu géométrique de  $M$  est la droite  $bc$  qui passe par les milieux  $b$ ,  $c$  des côtés  $AB$ ,  $AC$ .

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et J. Delacourcelle, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Farbes.

### TROISIÈME.

PAR M. MORET-BLANC.

**PREMIÈRE QUESTION.** — *Par les deux extrémités d'une droite  $AB$ , et d'un même côté de cette droite, on lui élève deux perpendiculaires  $AC$  et  $BD$ , telles que l'aire du trapèze  $ABCD$  ait une valeur constante donnée. Du milieu  $E$  de la droite  $AB$ , on abaisse une perpendiculaire  $EM$  sur la droite  $CD$ . Trouver le lieu décrit par le pied  $M$  de cette perpendiculaire quand on fait varier les longueurs des perpendiculaires  $AC$  et  $BD$ .*

*Même problème quand les lignes  $AC$  et  $BD$ , au lieu d'être perpendiculaires à  $AB$ , sont parallèles à une droite fixe donnée.*

Soit  $m^2$  l'aire donnée du trapèze ABCD. On a

$$\frac{AC + BD}{2} \times AB = m^2.$$

Soit F le milieu de CD; la ligne EF, parallèle à AC et à BD, sera perpendiculaire à AB et égale à

$$\frac{AC + BD}{2} = \frac{m^2}{AB},$$

troisième proportionnelle à AB et  $m$ .

Ayant élevé EF, perpendiculaire sur le milieu de AB et égale à cette longueur, le point F est le milieu de CD dans toutes ses positions. L'angle EMF étant droit, le lieu du point M est la circonférence décrite sur EF comme diamètre.

Si AC et BD sont parallèles à une droite fixe donnée, soit  $d$  leur distance; il faudra prendre  $EF = \frac{m^2}{d}$  et parallèle à la droite donnée: le lieu du point M sera encore la circonférence décrite sur EF comme diamètre.

DEUXIÈME QUESTION. — *Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les deux diagonales, l'angle qu'elles forment entre elles, et le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère. Discussion.*

Soient  $r$  le rayon du cercle circonscrit,  $d$  et  $d'$  les deux diagonales dont aucune évidemment ne doit surpasser  $2r$ , et  $\theta$  leur angle.

Décrivons une circonférence avec le rayon donné, et dans cette circonférence inscrivons une corde AC, égale à la diagonale  $d$ ; abaissons du centre O la perpendiculaire OI sur la corde AC; menons par O une droite qui fasse avec OI l'angle donné  $\theta$ , et prenons sur cette droite

$$OH = OH' = \sqrt{r^2 - \frac{d'^2}{4}}.$$





trouve un quadrilatère imaginaire, ayant pour sommets les quatre foyers de l'ellipse donnée, puis l'ensemble de deux coniques, l'une intérieure à cette ellipse (solution à rejeter par conséquent), l'autre extérieure, qui est la vraie solution. M. Poujade clôt sa lettre en donnant le moyen de former une équation du dixième degré contenant, outre ce qui précède, l'ellipse donnée elle-même. Depuis lors, si je ne me trompe, la question n'a pas reparu dans les *Nouvelles Annales*. Dans la solution que je vous envoie, il n'y a ni dixième ni huitième degré ; je vais tout droit à la courbe du *second* degré, qui est la réponse unique à la question posée. Je donne en outre, par le même procédé de calcul, le lieu du point de concours des hauteurs du triangle.

La question est fort intéressante. Elle m'a été communiquée par les élèves de Mathématiques spéciales de Rouen, à qui l'avaient envoyée des camarades du lycée Louis le-Grand (classe de M. Pruvost). Je n'ai pas trouvé du premier coup la solution relativement simple que je vous envoie.

*On circonscrit à une ellipse donnée un triangle ayant pour hauteurs les droites qui joignent les sommets aux points de contact de la courbe avec les côtés opposés : lieu des sommets du triangle ; lieu du point de concours des hauteurs.*

Soient

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = P = 0,$$

$$x \cos \beta + y \sin \beta - q = Q = 0,$$

$$x \cos \gamma + y \sin \gamma - r = R = 0$$

les équations des polaires des sommets du triangle.

La conique donnée aura une équation de la forme

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{Q} + \frac{C}{R} = 0,$$

si l'on exprime les conditions de l'énoncé, on a immédiatement

$$A = B = C.$$

Nous allons donc identifier l'équation

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} = 0$$

avec l'équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} p(\cos \beta + \cos \gamma) \\ + q(\cos \gamma + \cos \alpha) + r(\cos \alpha + \cos \beta) = 0, \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} p(\sin \beta + \sin \gamma) \\ + q(\sin \gamma + \sin \alpha) + r(\sin \alpha + \sin \beta) = 0, \end{array} \right. \\ & \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\alpha + \beta) = 0, \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha + \cos \alpha \cos \beta}{b^2} \\ = \frac{\sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha + \sin \alpha \sin \beta}{a^2} \\ = \frac{qr + rp + pq}{-a^2 b^2}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Désignons par  $\lambda$  la valeur commune de ces trois rapports; cette valeur est facile à déterminer. En effet, les équations (4) donnent

$$\begin{aligned} & \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) = -\lambda c^2, \\ & \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta) = \lambda(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Si l'on ajoute les équations (3) et (5) élevées au carré, tenant compte de l'équation (6), on a

$$c^4 \lambda^2 - 2(a^2 + b^2)\lambda - 3 = 0,$$

il faut prendre la racine négative, car la racine positive rendrait l'expression  $\lambda(a^2 + b^2)$ , c'est-à-dire la somme des trois cosinus du premier membre de l'équation (6), supérieure à 3.

Donc

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 - \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 3c^4}}{c^4}.$$

Soient maintenant  $x_1$  et  $y_1$  les coordonnées du sommet M, pôle de la droite  $R=0$ . On a évidemment

$$P_1 = Q_1 = -R_1$$

et, si l'on désigne par  $\mu'$  la valeur de ces trois expressions,

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = p + \mu',$$

$$x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta = q + \mu',$$

$$x_1 \cos \gamma + y_1 \sin \gamma = r + \mu'.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par

$$\cos \beta + \cos \gamma, \quad \cos \gamma + \cos \alpha, \quad \cos \alpha + \cos \beta$$

et ajoutons. Nous trouvons ainsi

$$\lambda b^2 x_1 = \mu' \cos \gamma.$$

En multipliant de nouveau par

$$\sin \beta + \sin \gamma, \quad \sin \gamma + \sin \alpha, \quad \sin \alpha + \sin \beta,$$

on trouve de même

$$\lambda a^2 y_1 = \mu' \sin \gamma.$$

Donc

$$\mu'^2 = \lambda^2 (b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2),$$

et comme, d'autre part,

$$\mu'^2 + \lambda (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2) = 0,$$

on a, pour l'équation du lieu de M,

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 + \lambda (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2) = 0,$$

$\lambda$  recevant la valeur déterminée plus haut.

Cette conique est extérieure à l'ellipse donnée. En effet,  $\lambda$  étant négatif, on a nécessairement

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 > 0$$

J'obtiens de la même manière le lieu du point de concours H des hauteurs du triangle. Soient  $x_0, y_0$  les coordonnées de ce point. Il est clair que  $P_0 = Q_0 = R_0$ , et, si l'on désigne par  $\mu$  la valeur commune de ces trois expressions, on a immédiatement

$$(\varepsilon) \quad 3\mu^2 = \lambda(a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2).$$

Multiplions par

$$\cos \beta + \cos \gamma, \cos \gamma + \cos \alpha, \cos \alpha + \cos \beta$$

les trois équations

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha = p + \mu,$$

$$x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta = q + \mu,$$

$$x_0 \cos \gamma + y_0 \sin \gamma = r + \mu,$$

et ajoutons. Nous aurons, en tenant compte de (1), (2) et (3),

$$\lambda b^2 x_0 = \mu (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

On aurait de même, en multipliant par  $\sin \beta + \sin \gamma, \dots$ ,

$$\lambda a^2 y_0 = \mu (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

En élevant au carré ces deux dernières équations, les ajoutant et tenant compte des équations (4) et de la valeur de  $\lambda$ , on a

$$\mu^2 = \frac{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}{c^4}.$$

Si l'on substitue dans l'équation ( $\varepsilon$ ), on a le lieu du point H :

$$3(b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2) = c^4 \lambda (a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2).$$

Cette conique est intérieure à l'ellipse donnée, puisque,  $\lambda$  étant négatif, on a nécessairement

$$a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2 - a^2 b^2 < 0.$$

*Lettre de M. A. Legoux, professeur à la Faculté  
des Sciences de Grenoble.*

Monsieur le Rédacteur,

A propos de la remarquable méthode d'intégration de l'équation des lignes de courbure de l'ellipsoïde de M. A. Picart, permettez-moi de vous rappeler une autre méthode géométrique que j'ai donnée en 1878 et dont j'ai indiqué l'application au cas particulier actuel (*Étude analytique et géométrique d'une famille de courbes*, p. 18).

Voici en quelques mots l'esprit de cette méthode :

On remarque d'abord que l'équation différentielle

$$-xy p^2 + (y^2 - x^2 + b^2)p + xy = 0,$$

où

$$p = \frac{dy}{dx},$$

peut se mettre sous la forme

$$(p.y + x)(y - p.x) + b^2 p = 0.$$

Cela posé, on fait un changement de variables ; on prend pour nouvelles variables  $x'$  et  $y'$ , liées aux anciennes par les équations

$$x = p',$$

$$y = p'x' - y',$$

$$p' = \frac{dy'}{dx'}.$$

On voit sans peine que

$$p = x',$$

$$px - y = y'.$$

On sait que cette transformation revient à prendre la courbe transformée par polaires réciproques de la pro-

posée relativement à la parabole

$$x^2 = 2y.$$

Le principe de cette transformation est dû à Monge (voir CHASLES, *Aperçu historique*, p. 376).

L'équation différentielle proposée devient

$$-p'(x'^2 + 1)y' + x'y'^2 + b^2x' = 0,$$

quel'on rend linéaire en posant

$$y'^2 = u$$

et dont l'intégrale est

$$u = y'^2 = c(x'^2 + 1) - b^2 :$$

c'est l'équation d'un système de coniques.

L'intégrale générale cherchée est l'équation des polaires réciproques de ces coniques relativement à la parabole

$$x^2 = 2y.$$

On trouve sans peine que cette équation est

$$\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c - b^2} = 1 ;$$

elle représente des coniques homofocales.

*Lettre de M. A. Hilaire, professeur au Lycée de Douai.*

Monsieur le Rédacteur,

Voulez-vous me permettre, quoique je ne sois nullement en cause, de répondre à la réclamation de M. Mansion (1881, p. 143) ?

Sil'on se reporte à l'article de M. Weill (1880, p. 255), la phrase citée par M. Mansion s'y trouve intercalée entre deux théorèmes; elle se termine en réalité par un point, et non, comme dans la citation, par deux

points; elle s'applique donc au premier des deux théorèmes :

*Si une conique est inscrite dans un triangle, et que la somme des carrés de ses axes reste constante, son centre décrit une circonférence ayant pour centre le point de concours des hauteurs du triangle.*

Or cette proposition, très connue, est due à Steiner, et elle a été seulement étendue à l'espace par M. Mention, professeur à Paris, et collaborateur des *Nouvelles Annales* jusqu'en 1867.

Je terminerai par deux indications bibliographiques :

1° On s'explique que M. Mention ait pu être regardé comme l'auteur du théorème de Géométrie plane, par ce qu'il l'avait énoncé et démontré, sans en indiquer l'origine, à la fin d'un long article sur l'hyperbole équilatère (*Nouvelles Annales*, 1865, p. 38).

2° Le théorème analogue de l'espace est ainsi conçu :

*Si un ellipsoïde est inscrit à un système de six plans, et que la somme des carrés de ses axes reste constante, son centre décrit une sphère.*

M. Mention n'avait pas fait connaître la position du centre de la sphère par rapport aux six plans donnés : cette détermination a été faite par M. Paul Serret.

On peut consulter là-dessus trois articles de ce dernier auteur, qui ont paru dans l'année 1865 de votre Journal (p. 145, 193 et 433) et qui ont servi de préliminaires à la *Géométrie de direction*, ouvrage publié quatre ans plus tard, en 1869.

*Note.* — Les questions 1342 et 1357 ont été résolues par M. Pisani; et les questions 1348 et 1353 par M. Artemieff, à Saint-Petersbourg.



**SOLUTIONS DE QUESTIONS  
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

---

*Question 127*

(voir 1<sup>re</sup> série, t. V, p. 448).

*En rendant rationnelle l'équation*

$$(a_1 + x)^{\frac{1}{2}} + (a_2 + x)^{\frac{1}{2}} + \dots + (a_n + x)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

*on parvient à une équation du degré  $2^{n-2}$ .*

Désignons, en général, par  $\alpha_p$  l'expression  $(a_p + x)^{\frac{1}{2}}$ . M. Desboves démontre, dans ses *Questions d'Algèbre*, p. 217, le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Étant données  $n$  lettres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , on forme  $2^{n-1}$  polynômes comme il suit : on écrit, à la suite de  $\alpha_1$ , successivement  $+\alpha_2$  et  $-\alpha_2$ , et l'on a ainsi les deux binômes  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$ ; à la suite de  $\alpha_1 + \alpha_2$  et  $\alpha_1 - \alpha_2$  on écrit successivement  $+\alpha_3$  et  $-\alpha_3$ , et l'on obtient ainsi quatre polynômes; on écrit à la suite des quatre polynômes successivement  $+\alpha_4$  et  $-\alpha_4$ , et l'on obtient ainsi huit polynômes, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les lettres aient été employées. Si l'on fait alors le produit des  $2^{n-1}$  derniers polynômes, on obtient une fonction symétrique de toutes les lettres élevées à des puissances paires.*

Si donc on multiplie le polynôme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

qui forme le premier membre de l'équation donnée, et



effet, les trois nombres  $n, n + 1, n + 2$ , n'ayant  
e facteur commun, sauf 2 si  $n$  est pair, devraient  
l'un un cube, un autre le double d'un cube, et  
e le triple d'un cube.

, d'après la remarque précédente,  $n + 1$  ne peut être  
ibe ou le double d'un cube; reste donc à supposer  
 $n + 1$  soit le triple d'un cube.  $n + 1$  sera alors de  
des formes  $9k, 9k + 3, 9k - 3$ , et l'on aura une  
rois combinaisons suivantes :

$$\begin{aligned} n &= 9k - 1, & 9k + 2, & 9k - 4, \\ n + 1 &= 9k, & 9k + 3, & 9k - 3, \\ n + 2 &= 9k + 1, & 9k + 4, & 9k - 2. \end{aligned}$$

$n + 2$  ne pourront être simultanément l'un un  
l'autre le double d'un cube.

nc, dans aucun cas, le nombre des boulets de la  
e sera un cube, sauf le cas de  $n = 1$ .

ie sera pas non plus une cinquième puissance.

audrait, en effet, que  $n + 1$  fût le triple d'une cin-  
ie puissance, et, en remarquant qu'une cinquième  
nce est de l'une des formes  $25k, 25k \pm 1, 25k \pm 7$ ,  
rait une des combinaisons

$$\begin{aligned} &= 25k, & 25k + 3, & 25k - 3, & 25k + 4, & 25k - 4, \\ &= 25k - 1, & 25k + 2, & 25k - 4, & 25k + 3, & 25k - 5, \\ &= 25k + 1, & 25k + 4, & 25k - 2, & 25k + 5, & 25k - 3; \end{aligned}$$

$n + 2$  ne seraient pas simultanément un cube et le  
e d'un cube.

nc le nombre des boulets d'une pile à base trian-  
re ne peut être un cube ni une cinquième puis-  
que si  $n = 1$ .

nsidérons maintenant une pile à base carrée, et

voyons si l'on peut avoir

$$n(n+1)(2n+1) = 6m^3.$$

Si  $2n+1$  est le triple d'un cube, on tombe dans un cas d'impossibilité déjà signalé.

Si  $2n+1$  est un cube, il est de l'une des formes  $9k$ ,  $9k+1$ ,  $9k-1$ , et l'on a une des combinaisons

$$2n+1 = 9k, \quad 9k+1, \quad 9k-1,$$

$$n = 9k+4, \quad 9k, \quad 9k-1,$$

$$n+1 = 9k+5, \quad 9k+1, \quad 9k.$$

Les deux autres nombres ne seront pas simultanément le triple et le double d'un cube.

Examinons si l'on peut avoir

$$n(n+1)(2n+1) = 6m^5.$$

Si  $2n+1$  est le triple d'une cinquième puissance,  $n$  et  $n+1$  devraient être une cinquième puissance et le double d'une cinquième puissance, ce qui est impossible. Si  $2n+1$  est une cinquième puissance, on aura l'une des combinaisons suivantes

$$2n+1 = 25k, \quad 25k+1, \quad 25k-1, \quad 25k+7, \quad 25k-7,$$

$$n = 25k+12, \quad 25k, \quad 25k-1, \quad 25k+3, \quad 25k-4,$$

$$n+1 = 25k+13, \quad 25k+1, \quad 25k, \quad 25k+4, \quad 25k-3,$$

et l'on voit que  $n$  et  $n+1$  ne seront pas simultanément le double et le triple d'une cinquième puissance.

Donc le nombre des boulets d'une pile à base carrée ne peut être une cinquième puissance ni le double d'une cinquième puissance, sauf le cas d'un seul boulet.

## Question 1328

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 478);

PAR M. MORET-BLANC.

*Étant données les équations*

$$) \quad 5x^2 + 5y^2 - z^2 + 60x - 24z = 0,$$

$$) \quad 25x^2 + 25y^2 + z^2 - 15xz = 0,$$

$$) \quad 75x^2 + 75y^2 + 2z^2 + 5yz - 45xz = 0,$$

*présentant des surfaces rapportées à un même système d'axes rectangulaires, on demande : 1<sup>o</sup> de trouver le genre de chaque surface; 2<sup>o</sup> de trouver l'intersection des surfaces (1) et (2); 3<sup>o</sup> de trouver les projections sur les plans coordonnés de l'intersection des surfaces (1) et (2).* (ERNEST LEBON.)

1<sup>o</sup> L'équation (1) peut s'écrire

$$5(x+6)^2 + 5y^2 - (z+12)^2 = 36;$$

elle représente un hyperboloïde à une nappe, de révolution autour d'un axe parallèle à  $Oz$ , et ayant son centre au point  $x = -6, y = 0, z = -12$ ; le rayon du cercle gorge est égal à  $\frac{6}{\sqrt{5}}$  et les génératrices font avec l'axe

un angle dont la tangente est égale à  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Les équations homogènes (2) et (3) représentent des surfaces du second degré ayant leurs sommets à l'origine.

Les trois surfaces passent par l'origine des coordonnées et sont coupées suivant des cercles par des plans parallèles au plan des  $xy$ .

2<sup>o</sup> En éliminant  $y$  entre les équations (1) et (2), on obtient l'équation

$$(z+20)(2z-5x) = 0;$$

elle représente le système de deux plans perpendiculaires au plan des  $xz$  et passant par l'intersection de deux surfaces. Le premier, parallèle au plan des  $xy$  coupe les deux surfaces suivant un cercle,

$$z = -20, \quad (x+6)^2 + y^2 = 20;$$

le second les coupe suivant deux génératrices dont les projections sur le plan des  $xz$  se confondent,

$$z = \frac{5}{2}x,$$

et dont les projections sur le plan des  $xy$  ont pour équation

$$4y^2 - 5x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

3° Si, entre les équations (1) et (3), on élimine successivement  $y$ ,  $x$  et  $z$ , on obtient les équations

$$\begin{aligned} & 5z^2(5x^2 - z^2 + 60x + 24z) \\ & + (17z^2 + 360z - 45xz - 960x)^2 = 0, \\ & z^2(17z + 5y + 360)^2 \\ & + 108z(z + 20)(17z + 5y + 360) \\ & + 405(z + 20)^2(5y^2 - z^2 - 24z) = 0, \\ & (x^2 + y^2 + 12x)(45x - 5y + 48)^2 \\ & - 5(17x^2 + 17y^2 + 24x)^2 \\ & - 24(17x^2 + 17y^2 + 24x)(45x - 5y + 48) = 0, \end{aligned}$$

qui représentent les projections de l'intersection des surfaces (1) et (3) sur les plans  $xOz$ ,  $yOz$  et  $xOy$ .

Les deux premières ne renferment  $x$  et  $y$  respectivement qu'au second degré; on peut donc les résoudre par rapport à ces variables. La troisième ne renferme ni terme indépendant, ni terme du premier degré; en la transformant en coordonnées polaires, on aura une équation du second degré en  $\rho$ . La discussion et la con-

struction de ces trois courbes ne présente d'autre difficulté que la longueur des calculs, résultant de la grandeur des coefficients; je ne m'y arrêterai pas.

### Question 1330

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 478);

PAR M. S. REALIS.

*Les nombres  $x, y, z$  étant exprimés par les formules*

$$x = 2(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) + 2\alpha(2\beta + 3\gamma + 4\delta),$$

$$y = 2(-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) + 2\beta(2\alpha + 3\gamma + 4\delta),$$

$$z = 3(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 4\gamma(\alpha + \beta + 2\delta),$$

*on peut énoncer les propriétés suivantes :*

1<sup>o</sup> *L'expression*

$$x^2 + y^2 + z^2$$

*se réduit à une somme de deux carrés.*

2<sup>o</sup> *Pour des valeurs entières convenables de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , tout nombre  $N$ , qui est égal à la somme de deux carrés entiers et à la somme de trois carrés entiers, peut être représenté par l'expression ci-dessus, dont les termes ont été préalablement débarrassés des facteurs communs inutiles.*

La proposition se relie à celles qui font l'objet d'un précédent article des *Nouvelles Annales* <sup>(1)</sup> et se démontre de la même manière.

Les indéterminées  $x, y, z$  étant exprimées en  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , comme il est dit dans l'énoncé, posons en outre

$$t = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2,$$

$$u = 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + 2\delta(2\alpha + 2\beta + 3\gamma).$$

---

(<sup>1</sup>) *Développements sur quelques théorèmes d'Arithmétique* (voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 500).

On aura, par identité, la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2,$$

c'est-à-dire une équation indéterminée dont toutes les solutions entières peuvent s'obtenir par les formules ci-dessus, moyennant des valeurs entières convenables attribuées à  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . De là la proposition énoncée.

Voici quelques exemples :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 11, \quad \beta = 10, \quad \gamma = 14, \quad \delta = -15; \\ 3^2 + 2^2 + 2^2 = 4^2 + 1^2 = 17; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 10, \quad \beta = 7, \quad \gamma = 10, \quad \delta = -9; \\ 4^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 = 18; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 14, \quad \beta = 13, \quad \gamma = 16, \quad \delta = -19; \\ 4^2 + 3^2 + 1^2 = 5^2 + 1^2 = 26; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 7, \quad \delta = -8; \\ 6^2 + 2^2 + 1^2 = 5^2 + 4^2 = 41; \end{array} \right.$$

.....

La question proposée est ainsi résolue, puisque l'on a la solution complète de l'équation indéterminée d'où elle dépend. Quant aux preuves de la généralité absolue de la solution précédente, elles tiennent aux mêmes considérations qui se rapportent aux équations résolues dans l'article mentionné. Il en est de même quant aux moyens de déterminer les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  d'après des valeurs préalablement données de  $t, u, x, y, z$ . Nous n'insistons donc pas ici sur ce sujet.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Ferdinando Pisani; Moret-Blanc; Marcello Rocchetti.



# NOTE SUR LA GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE PAPPUS;

PAR M. H. RESAL.

L'illustre géomètre d'Alexandrie a énoncé le théorème suivant, dont la démonstration, si elle a été donnée, n'est pas parvenue jusqu'à notre époque :

*Si trois mobiles placés aux sommets d'un triangle partent en même temps et parcourent respectivement les trois côtés, en allant dans le même sens et avec des vitesses proportionnelles à ces côtés, leur centre de gravité restera immobile.*

Ce théorème, qui est tombé dans l'oubli malgré l'intérêt qu'il présente, est un cas particulier du suivant :

*Soient  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$  un polygone fermé de  $n$  côtés, l'un ou gauche,  $m$  la masse de chacun des  $n$  points matériels, partant en même temps des sommets  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , et dans le même sens, avec des vitesses constantes  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , proportionnelles aux côtés  $a_1 = A_1 A_2, a_2 = A_2 A_3, \dots, a_n = A_n A_1$ , le centre de gravité des masses  $m$  reste fixe.*

Rapportons le système à trois axes coordonnés rectangulaires  $Ox, Oy, Oz$ , et soient

$x_i, y_i, z_i$  les coordonnées du sommet  $A_i$ ;  
 $x, y, z$  celles du centre de gravité du système des masses  $m$  au bout du temps  $t$ ;  
 $v_i = k a_i$  la vitesse du mobile  $m_i$  qui part du sommet  $A_i$ , en désignant par  $k$  une constante.

L'ordonnée parallèle à  $Ox$  du mobile  $m_i$  au bout du

temps  $t$  étant

$$x_i + k a_i \cos(\widehat{a_i, x}) \times t,$$

on a, en prenant les moments par rapport au plan  $yOz$ ,

$$x \Sigma m = m \sum_{i=1}^{i=n} \left[ x_i + k a_i \cos(\widehat{a_i, x}) \times t \right]$$

ou

$$x \Sigma m = m \Sigma x_i + k t \Sigma_{i=1}^{i=n} a_i \cos(\widehat{a_i, x}).$$

Comme le polygone est fermé, le second terme du second membre de cette égalité est nul ; d'ailleurs,  $\Sigma m = nr$  ; par suite,

$$x = \frac{1}{n} \Sigma x_i,$$

et de même

$$y = \frac{1}{n} \Sigma y_i,$$

$$z = \frac{1}{n} \Sigma z_i,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

## SUR L'EXPRESSION DU VOLUME DE CERTAINS TÉTRAÈDRES;

PAR M. H. FAURE,  
Chef d'escadron d'Artillerie.

I. Si l'on désigne par  $a, b, c, d; a', b', c', d'$  les sommets de deux tétraèdres, on a la relation suivante :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'bcd & a'cda & a'dab & a'abc \\ b'bcd & b'cda & b'dab & b'abc \\ c'bcd & c'cda & c'dab & c'abc \\ d'bcd & d'cda & d'dab & d'abc \end{vmatrix} = (abcd)^3 \cdot a'b'c'd',$$

les volumes des divers tétraèdres que l'on peut former en joignant les sommets du premier à ceux du second.

Le théorème, que j'avais proposé en question, a été inséré dans ce Journal.

Supposons qu'il existe entre les volumes de ces tétraèdres les relations

$$\begin{aligned}\frac{a'bcd}{l} &= \frac{a'cda}{m} = \frac{a'dab}{n} = \frac{a'abc}{p}, \\ \frac{b'bcd}{l'} &= \frac{b'cda}{m'} = \frac{b'dab}{n'} = \frac{b'abc}{p'}, \\ \frac{c'bcd}{l''} &= \frac{c'cda}{m''} = \frac{c'dab}{n''} = \frac{c'abc}{p''}, \\ \frac{d'bcd}{l'''} &= \frac{d'cda}{m'''} = \frac{d'dab}{n'''} = \frac{d'abc}{p'''}. \end{aligned}$$

De la première nous déduisons

$$\frac{bcd}{l} = \frac{a'cda}{m} = \frac{a'dab}{n} = \frac{a'abc}{p} = \frac{abcd}{l+m+n+p}.$$

Les trois autres donnent des résultats analogues, de sorte que, si dans le déterminant  $\Delta$  nous remplaçons les volumes par leurs valeurs en fonction de  $abcd$  et des coefficients  $l, m, n, \dots$ , nous trouverons, en représentant par  $P, P', P'', P'''$  les sommes  $l+m+n+p, \dots$ ,

$$\begin{vmatrix} l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \\ l'' & m'' & n'' & p'' \\ l''' & m''' & n''' & p''' \end{vmatrix} \frac{abcd}{P \cdot P' \cdot P'' \cdot P'''} = a'b'c'd'.$$

Les quantités  $l, m, n, p, \dots$  sont susceptibles de varier, car on doit avoir en même temps

$$\begin{aligned}a'bcd + a'cda + a'dab + a'abc &= abcd, \\ l + m + n + p &= P. \end{aligned}$$

Si les points  $a', b', c', d'$  sont sur les faces A, B, C, D, on a, dans l'espace, le théorème correspondant à la question 1353.

III. Supposons que les points  $a', b', c', d'$  soient pris respectivement sur les faces A, B, C, D du tétraèdre  $abcd$ . Nous aurons

$$\begin{aligned} a'bcd &= 0, & a'cda &= \frac{a'cd(a, A)}{3}, \\ a'dab &= \frac{a'db(a, A)}{3}, & a'abc &= \frac{a'bc(a, A)}{3}, \end{aligned}$$

et des expressions analogues pour les autres éléments du déterminant  $\Delta$ . Notre premier théorème devient donc celui-ci :

*Un tétraèdre  $abcd$  étant donné, si l'on prend sur ses faces les points  $a', b', c', d'$  et que l'on désigne par A, B, C, D les aires des faces de ce tétraèdre, on aura*

$$\begin{vmatrix} 0 & a'cd & a'db & a'bc \\ b'cd & 0 & b'da & b'ac \\ c'bd & c'da & 0 & c'ab \\ d'bc & d'ca & d'ab & 0 \end{vmatrix} = \frac{a'b'c'd'}{abcd} A.B.C.D.$$

Si, en particulier, les points  $a', b', c', d'$  sont les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du tétraèdre  $abcd$  sur ses faces, les triangles qui figurent dans le déterminant sont les projections de trois des faces sur la quatrième, et l'on obtient le résultat indiqué par M. Genty (question 1355).

IV. Joignons un point quelconque  $o$  aux sommets  $a, b, c, d$  et prenons sur ces droites respectivement les points  $a', b', c', d'$ . Ces points formeront un tétraèdre  $a'b'c'd'$ , homologique au tétraèdre  $abcd$ . Si l'on désigne par  $V'$  le volume de ce tétraèdre, par  $V_a, V_b, V_c, V_d$  les

volumes des tétraèdres qui ont pour sommet commun le point  $o$ , et pour bases les faces  $A, B, C, D$  du tétraèdre  $abcd$ , on a la relation

$$V' = \frac{oa'.ob'.oc'.od'}{oa.ob.oc.od} \left( \frac{oa}{oa'} V_a + \frac{ob}{ob'} V_b + \frac{oc}{oc'} V_c + \frac{od}{od'} V_d \right).$$

En effet, si l'on désigne par  $V'_a, V'_b, V'_c, V'_d$  les volumes des tétraèdres ayant pour sommet commun le point  $o$  et pour bases les faces du tétraèdre  $a'b'c'd'$ , on a l'égalité évidente

$$V' = \frac{V'_a}{V_a} V_a + \frac{V'_b}{V_b} V_b + \frac{V'_c}{V_c} V_c + \frac{V'_d}{V_d} V_d.$$

Or, les tétraèdres  $V_a, V'_a$  ayant en commun les trois arêtes qui se coupent au point  $o$ ,

$$\frac{V'_a}{V_a} = \frac{ob'.oc'.od'}{ob.oc.od};$$

même,

$$\frac{V'_c}{V_c} = \frac{oa'.ob'.od'}{oa.ob.od}, \quad \frac{V'_d}{V_d} = \frac{oa'.ob'.oc'}{oa.ob.oc}.$$

Il résulte la relation que nous voulions établir. Si les points  $a', b', c', d'$  sont sur les faces  $A, B, C, D$ , on aura

$$\frac{oa}{oa'} = 1 - \frac{aa'}{oa'} = 1 - \frac{V}{V_a}, \quad \frac{ob}{ob'} = 1 - \frac{V}{V_b}, \quad \dots,$$

appelant  $V$  le volume  $abcd$ ; l'égalité (1) devient

$$V' = - \frac{3 V V_a V_b V_c V_d}{(V - V_a)(V - V_b)(V - V_c)(V - V_d)}.$$

Dans cette relation, on doit donner aux volumes  $V_a, V_b, V_c, V_d$  des signes tels que leur somme soit égale à  $V$ .

En particulier, si le point  $o$  est le centre de la sphère

inscrite au tétraèdre  $abcd$ , on aura

$$V' = - \frac{3 V.A.B.C.D}{(S-A)(S-B)(S-C)(S-D)},$$

en posant

$$S = A + B + C + D.$$

C'est, à un facteur numérique près ( $-3$  au lieu de  $6$ ), le résultat indiqué par M. Genty (question 1352, 1<sup>re</sup> Partie).

V. L'expression (1) que nous venons de trouver pour le volume du tétraèdre  $a'b'c'd'$ , homologique du tétraèdre  $abcd$ , peut se mettre sous une autre forme. Si par le point  $o$  nous menons des plans parallèles aux faces  $b'c'd'$ ,  $c'd'a'$ ,  $d'a'b'$ ,  $a'b'c'$ , ces plans rencontrent les faces correspondantes  $bcd$ ,  $cda$ ,  $dab$ ,  $abc$  du tétraèdre  $abcd$ , suivant quatre droites qui appartiennent à un même plan  $I$ , parallèle au plan d'homologie.

Mais, d'après une propriété connue des figures homologiques, si l'on désigne par  $k$  la distance du plan  $I$  au plan d'homologie, on a

$$\frac{oa}{oa'} = \frac{(a, I)}{k}, \quad \frac{ob}{ob'} = \frac{(b, I)}{k}, \quad \frac{oc}{oc'} = \frac{(c, I)}{k}, \quad \frac{od}{od'} = \frac{(d, I)}{k}.$$

D'ailleurs,

$$V(o, I) = V_a(a, I) + V_b(b, I) + V_c(c, I) + V_d(d, I);$$

donc

$$\frac{(o, I)}{k} = \frac{\frac{oa}{oa'} V_a + \frac{ob}{ob'} V_b + \frac{oc}{oc'} V_c + \frac{od}{od'} V_d}{V}.$$

L'expression (1) devient ainsi

$$a'b'c'd' = \frac{k^3(o, I) V}{(a, I)(b, I)(c, I)(d, I)}.$$

VI. Dans le déterminant  $\Delta$ , remplaçons les volumes par les valeurs

$$\begin{aligned} a'bcd &= \frac{1}{3}A(a', A), \\ a'cda &= \frac{1}{3}B(a', B), \\ a'dab &= \frac{1}{3}C(a', C), \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

nous obtenons la relation

$$\begin{vmatrix} (a', A) & (a', B) & (a', C) & (a', D) \\ (b', A) & (b', B) & (b', C) & (b', D) \\ (c', A) & (c', B) & (c', C) & (c', D) \\ (d', A) & (d', B) & (d', C) & (d', D) \end{vmatrix} = \frac{(3V)^3 \cdot 3V'}{A \cdot B \cdot C \cdot D},$$

qui se trouve dans mon Mémoire sur les indices (n° 87).

VII. D'un point  $o$  on abaisse les perpendiculaires  $oa'$ ,  $ob'$ ,  $oc'$ ,  $od'$  sur les faces du tétraèdre  $abcd$ ; si l'on désigne par  $V'$  le volume du tétraèdre  $a'b'c'd'$ , par  $V$  celui du tétraèdre  $abcd$ , et par  $A, B, C, D$  les aires de ses faces,

$$V' = \frac{3V^2}{4ABCD} oa' \cdot ob' \cdot oc' \cdot od' \left( \frac{A}{oa'} + \frac{B}{ob'} + \frac{C}{oc'} + \frac{D}{od'} \right).$$

En effet, le volume  $V'$  est la somme algébrique de quatre tétraèdres ayant pour sommet commun le point  $o$  et pour bases les triangles  $b'c'd'$ ,  $c'd'a'$ ,  $d'a'b'$ ,  $a'b'c'$ .

Or

$$6b'c'd' = ob' \cdot oc' \cdot od' \sin b'od' \sin (oc', b'od').$$

Mais

$$\sin b'od' = \sin BD, \quad \sin (oc', b'od') = \sin (oc, C);$$

par conséquent,

$$6b'c'd' = ob' \cdot oc' \cdot od' \sin BD \sin (oc, C) = ob' \cdot oc' \cdot od' \frac{(3V)^2}{2BCD}.$$

On a des expressions analogues pour les valeurs des

lorsque  $m, n, m', n'$  varient d'après une loi donnée, l'intersection de ces deux sphères engendre la girocyclide. Changeons, dans ces équations,

$$\begin{aligned} x & \text{ en } \frac{k^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - c)^2}, \\ y & \text{ en } \frac{k^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - c)^2}, \\ z & \text{ en } c + \frac{k^2 (\zeta - c)}{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - c)^2}; \end{aligned}$$

elles deviennent

$$(3) \quad k^2 - 2m\xi - 2n\eta + 2c(\zeta - c) = 0,$$

et

$$(4) \quad k^2 - 2m'\xi - 2n'\eta + 2c(\zeta - c) = 0.$$

Si, dans ces équations, on considère  $\xi, \eta, \zeta$  comme des coordonnées courantes, elles représentent deux plans passant par le point  $\left(\xi = 0, \eta = 0, \zeta = \frac{2c^2 - k^2}{2c}\right)$ , et, lorsque  $m, n, m', n'$  varient d'après une loi donnée, leur intersection décrit un cône (réel ou imaginaire).

Réciproquement, si dans les équations (3) et (4) on change

$$\begin{aligned} \xi & \text{ en } \frac{k^2 x}{x^2 + y^2 + (z - c)^2}, \\ \eta & \text{ en } \frac{k^2 y}{x^2 + y^2 + (z - c)^2}, \\ \zeta & \text{ en } c + \frac{k^2 (z - c)}{x^2 + y^2 + (z - c)^2}, \end{aligned}$$

on retombe sur les équations (1) et (2).

Donc, à toute girocyclide correspond un cône, et réciproquement. Les génératrices du cône correspondent aux cercles générateurs de la girocyclide.

Remarquons en outre que, quel que soit  $k$ , pour une



même détermination de  $m, n, m', n'$ , toutes les droites représentées par les équations (3) et (4) ont la même direction. Donc tous les cônes transformés sont égaux. En particulier, ils sont égaux au cône tangent à la surface au point singulier dont les coordonnées sont  $0, 0$  et  $c$ , car, pour  $k = 0$ , les équations (3) et (4) représentent les plans tangents aux sphères (1) et (2) en ce point.

Ils sont, de plus, symétriques du cône tangent au point  $(0, 0, -c)$ , par rapport à un plan parallèle au plan des  $xy$ .

III. Voyons maintenant à quoi correspondent les lignes de courbure de la deuxième série. D'après un théorème connu, ce sont les transformées des lignes de courbure de la deuxième série du cône, et celles-ci sont les intersections du cône avec des sphères de rayon arbitraire, ayant pour centre le sommet du cône. Il est facile de le vérifier analytiquement.

D'après un théorème démontré par M. Amigues, les lignes de courbure de la deuxième série sont situées sur des sphères dont l'équation générale est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hz + c^2 = 0,$$

$h$  étant un paramètre arbitraire.

Cette équation peut s'écrire

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 2(c - h)(z - c) + 2c(c - h) = 0.$$

Si l'on y fait la transformation indiquée, il vient

$$k^4 + 2k^2(c - h)(\zeta - c) + 2c(c - h)[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - c)^2] = 0.$$

Si  $h$  varie, cette équation représentera une série de sphères dont le centre sera sur l'axe des  $z$ , et à une distance de l'origine égale à  $\frac{2c^2 - k^2}{2c}$ ; ce sont bien les sphères définies précédemment.

IV. Une girocyclide du quatrième ordre, rapportée, comme l'a fait M. Amigues, au centre et aux axes de la conique que décrit le centre de la sphère enveloppée, a pour équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4A(x - a)^2 + 4B(y - b)^2$$

ou bien

$$[(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + 2a(x - a) + 2b(y - b) + 2c(z - c)]^2 = 4A(x - a)^2 + 4B(y - b)^2.$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point  $(a, b, 0)$ , cette équation devient

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 2ax + 2by + 2c(z - c)]^2 = 4Ax^2 + 4By^2,$$

et, si l'on effectue sur cette dernière équation la transformation indiquée, il vient

$$[k^2 + 2a\xi + 2b\eta + 2c(\zeta - c)]^2 = 4A\xi^2 + 4B\eta^2,$$

équation qui représente un cône du second ordre.

( *A suivre.* )

## QUESTION DE LICENCE

( MONTPELLIER. — NOVEMBRE 1879 ) :

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

*On donne un cylindre droit vertical dont la base est un cercle de centre O et de rayon a. Une courbe tracée sur ce cylindre jouit de la propriété que, M désignant un point de cette courbe et MI la tangente correspondante, la projection du rayon vecteur OM = r sur cette tangente est constante et égale à une ligne*

donnée  $k$ . Le point  $M$  est défini par l'ordonnée verticale  $z$  et par l'angle  $\omega$  que la projection horizontale  $OP$  de  $OM$  forme avec le rayon fixe  $OA$ .

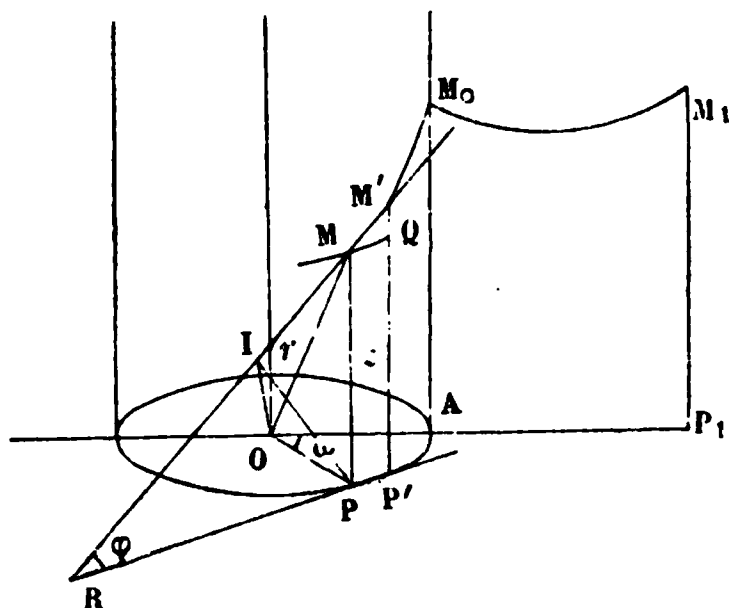
On propose de :

1° Trouver la relation finie qui existe entre  $z$  et  $\omega$ , ou, si l'on préfère, exprimer ces coordonnées en fonction d'une variable auxiliaire;

2° Trouver, en fonction de  $z$ , l'expression  $s$  de l'arc de la courbe;

3° Calculer l'aire cylindrique comprise entre deux génératrices données et les arcs qu'elles interceptent sur la courbe et sur le cercle de base.

1° Désignons par  $\varphi$  l'angle  $MRP$  que fait la tangente à la courbe avec la tangente  $PR$  au cercle de base.  $OI$



étant la perpendiculaire abaissée du centre  $O$  sur  $MR$ , la droite  $PI$  sera aussi perpendiculaire sur  $MR$  et l'angle  $MPI$  sera égal à l'angle  $\varphi$ . On aura donc

$$(1) \quad z = \frac{k}{\sin \varphi}.$$

Considérons maintenant un point  $M'$  de la courbe infiniment voisin de  $M$ , et un arc de cercle  $MQ$  parallèle au cercle de base et rencontrant en  $Q$  l'ordonnée  $M'P'$ .

Le triangle rectangle infiniment petit  $MM'Q$  nous donnera

$$MQ = PP' = a \, d\omega = dz \cot \varphi,$$

ou, en remplaçant  $\cot \varphi$  par sa valeur tirée de (1),

$$(2) \quad a \, d\omega = \frac{1}{k} \sqrt{z^2 - k^2} \, dz,$$

d'où

$$a\omega = \frac{z \sqrt{z^2 - k^2}}{2k} - \frac{k}{2} \log(z + \sqrt{z^2 - k^2}) + C.$$

2° Le même triangle rectangle donne

$$ds = \frac{dz}{\sin \varphi},$$

ou, en tenant compte de (1),

$$ds = \frac{1}{k} z \, dz,$$

d'où

$$s = \frac{1}{2k} z^2 + C.$$

3° Coupons le cylindre suivant la génératrice  $AM_0$  et développons-en la surface sur un plan passant par cette génératrice; l'aire  $AM_0MP$  que nous voulons calculer se placera en  $AM_0M_1P_1$ , de telle sorte que  $AP_1 = a\omega$  et  $M_1P_1 = z$ ; en la désignant par  $A$ , nous aurons

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{a\omega} a \, z \, d\omega = \int_{z_0}^z \frac{z}{k} \sqrt{z^2 - k^2} \, dz \\ &= \frac{1}{3k} \left[ (z^2 - k^2)^{\frac{3}{2}} - (z_0^2 - k^2)^{\frac{3}{2}} \right]. \end{aligned}$$

*Note.* — La même question a été résolue par M. A. Leinekugel, qui a également résolu la question de licence (même Tome, p. 55).

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES  
(CONCOURS DE 1880).

---

COMPOSITION DU 9 AOÛT.

*Mathématiques spéciales.*

On donne un ellipsoïde, et l'on considère un cône ayant pour base la section principale de l'ellipsoïde perpendiculaire à l'axe mineur; ce cône coupe l'ellipsoïde suivant une seconde courbe située dans un plan  $Q$ .

1° Le sommet du cône se déplaçant dans un plan donné  $P$ , trouver le lieu décrit par le pôle du plan  $Q$  par rapport à l'ellipsoïde.

2° Ce lieu est une surface du second degré  $\Sigma$ : on demande de déterminer les positions du plan  $P$  pour lesquelles le cône asymptote de cette surface  $\Sigma$  a trois génératrices parallèles aux axes de symétrie de l'ellipsoïde.

3° Le plan  $P$  se déplaçant de façon que la surface  $\Sigma$  satisfasse aux conditions précédentes, trouver le lieu des foyers des sections faites dans ces surfaces  $\Sigma$  par un plan fixe  $R$  perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde.

4° Trouver la surface engendrée par la courbe, lieu de ces foyers, quand le plan  $R$  se déplace parallèlement à lui-même.

COMPOSITION DU 10 AOÛT.

*Mathématiques élémentaires.*

On donne le côté  $a$  d'un triangle  $ABC$ , la somme  $l$  des deux autres côtés, la somme  $K^2$  des carrés des bissectrices, soit des angles intérieurs adjacents au côté  $a$ , soit

des angles extérieurs adjacents au même côté, et l'on demande de calculer les deux autres côtés  $b$  et  $c$ .

On examinera le cas particulier où  $l = 4a$ , et, dans ce cas, on discutera complètement les deux problèmes en laissant  $a$  fixe et en faisant varier  $K^2$ .

#### COMPOSITION DU 11 AOUT.

##### *Théorie.*

1° Définir les lignes de courbure et établir leur équation différentielle.

2° Former l'équation qui donne les rayons de courbure principaux en un point d'une surface donnée; établir les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette équation ait deux racines égales.

##### *Application.*

Soient  $u$  une fonction donnée d'une variable  $\alpha$  et  $u'$  sa dérivée. Soit  $\varphi(\beta)$  une fonction donnée d'une autre variable  $\beta$ . On considère une surface  $S$  telle que les coordonnées rectangulaires  $x, y, z$  d'un quelconque de ses points s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} x &= (u + \beta) \cos \alpha - u' \sin \alpha, \\ y &= (u + \beta) \sin \alpha + u' \cos \alpha, \\ z &= \varphi(\beta). \end{aligned}$$

1° Démontrer que les projections, sur le plan  $xOy$ , des sections de la surface par des plans parallèles au plan  $xOy$  ont même développée.

2° Démontrer que les normales à la surface  $S$  aux différents points d'une quelconque de ces sections forment une surface développable, et déterminer l'arête de rebroussement de cette surface.

3° Trouver les lignes de courbure de la surface  $S$  et les rayons de courbure principaux en un quelconque de ses points.

*Géométrie descriptive.*

Intersection d'un cône et d'un parabolôide hyperbolique ayant une génératrice commune.

*Données.*

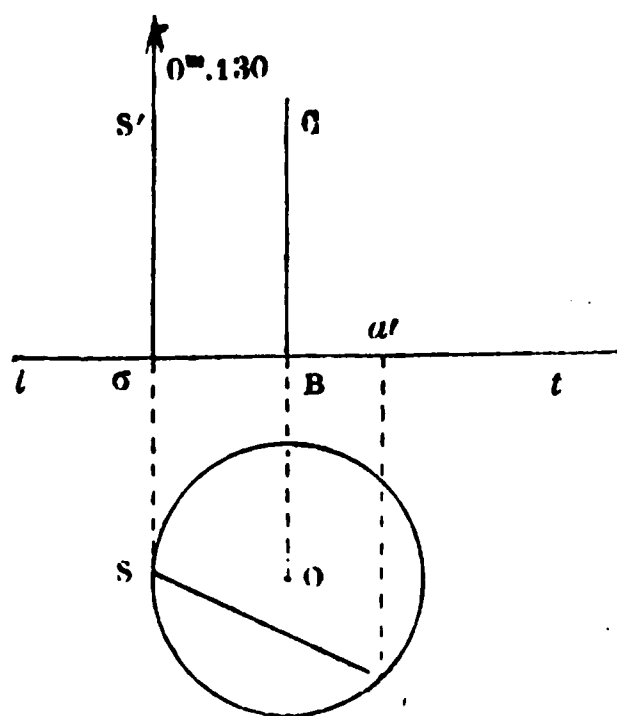
*Cône.* — La base du cône est un cercle situé dans le plan horizontal et ayant pour centre le point  $O$ .

Distance du centre  $O$  au bord droit du cadre.  $0^m,100$

Distance  $OB$  du centre  $O$  à la ligne de terre.  $0,095$

Rayon du cercle.  $0,080$

Le sommet est projeté horizontalement en  $S$ , sur le



diamètre du cercle de base parallèle à la ligne de terre, et verticalement en un point  $S'$  tel que  $S'\sigma = 0^m,130$ .

*Parabolôide.* — Il a pour plan directeur le plan horizontal, pour directrices :

1° La verticale  $OBC$  passant par le centre  $O$  du cercle base du cône;

2° La génératrice  $SA$  du cône dont la projection horizontale fait avec la ligne de terre un angle de  $30^\circ$ .





1° On demande quelles doivent être, d'une part, la loi de la rotation du tube, de l'autre, les circonstances initiales du mouvement, pour que la distance  $r$  du point M au point fixe O soit, à chaque instant  $t$ , donnée par la formule

$$r = k(t + \alpha)^2,$$

K et  $\alpha$  étant des constantes positives données.

2° Conservant pour le mouvement de rotation du tube la loi précédemment trouvée, ne faisant d'ailleurs aucune hypothèse sur les circonstances initiales, on demande d'étudier le mouvement du point pesant dans le tube.

### *Calcul.*

Étant donnée l'équation

$$z^4 - z + 1 = 0,$$

1° Démontrer qu'elle a toutes ses racines imaginaires;

2° Calculer la partie réelle et le coefficient de  $\sqrt{-1}$  pour chacune de ces racines. En posant  $z = x + yi$ , on verra que le problème dépend de la recherche d'une des racines d'une équation du troisième degré; on calculera cette racine à l'aide des Tables trigonométriques avec le degré d'approximation qu'elles comportent.

### *Mathématiques spéciales. (Leçons.)*

1° Équation du plan tangent. — Application aux surfaces du second ordre.

2° Exposer quelques-unes des méthodes à l'aide desquelles on reconnaît la nature d'une surface du second degré donnée par son équation.

3° Asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes. (Première leçon.)



ou d'une hyperbole, déterminer les axes de la courbe en grandeur et en position.

Étant donnée l'équation générale d'une parabole, déterminer son axe en position et la grandeur du paramètre.

20° Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la courbe d'intersection a des branches infinies. (Géométrie descriptive.)

21° Mener par une droite un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à une nappe. (Géométrie descriptive.)

22° Section plane de l'hyperboloïde de révolution à une nappe, dans le cas où la courbe est une hyperbole. (Géométrie descriptive.)

### *Mathématiques élémentaires. (Leçons.)*

1° Résolution et discussion de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

2° Figures symétriques par rapport à un axe, par rapport à un point, par rapport à un plan.

3° Maximum et minimum de l'expression

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

4° Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. — Fractions décimales périodiques.

5° Mesure des angles.

6° Volume de la sphère et du segment sphérique.

7° Résolution des équations

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'.$$

Discussion.

8° Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.



ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, SECTION DES SCIENCES  
(CONCOURS DE 1881).

---

COMPOSITION DU 27 JUIN.

*Mathématiques.*

On considère la courbe du troisième ordre

$$27y^2 = 4x^3:$$

1° On demande la condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres  $m$  et  $n$  pour que la droite

$$y = mx + n$$

soit tangente à cette courbe.

2° On demande le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe proposée deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2axy = B.$$

3° Par un point  $A$  pris sur la courbe on mène des sécantes coupant cette courbe en deux points variables  $M, M'$ . On demande le lieu du milieu du segment  $MM'$ . Discuter la forme de ce lieu et indiquer les arcs qui répondent à des sécantes pour lesquelles les points  $M, M'$  sont réels.

---



rayon du même petit cercle, on mène une verticale; sur la partie de cette verticale comprise entre son point supérieur de rencontre avec la sphère et le plan horizontal de projection, on construit un triangle équilatéral. Ce triangle, en tournant autour de cette verticale, engendre un double cône. — On demande de représenter la sphère donnée, supposée pleine et opaque, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le double cône.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point quelconque de la ligne commune à la sphère et à l'un des cônes, et la tangente en ce point.

*Titre extérieur* : Intersection de surfaces.

*Titre intérieur* : Sphère entaillée par un double cône.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à  $0^m, 190$  du petit côté inférieur.

### III. — *Triangle.*

Étant donnés dans un triangle ABC,

$$a = 32578^m, 29,$$

$$b = 54805^m, 73,$$

$$C = 112^\circ 35' 28'', 15,$$

calculer A, B, c et l'aire du triangle.

### IV. — *Physique et Chimie.*

1. On pèse un ballon préalablement rempli d'air sec, à  $0^\circ$  et sous la pression  $H_0 = 754^{mm}, 66$ ; soit P son poids. On fait le vide dans ce ballon, ramené à  $0^\circ$ , et, après avoir noté la pression de l'air restant,  $h_0 = 7^{mm}$ , on le pèse de nouveau; soit p son poids.









## 2. Propriétés principales et préparation de l'hydrogène phosphoré.

Quel est, à 0° et sous la pression de 760<sup>mm</sup>, le volume d'hydrogène contenu dans 500<sup>gr</sup> d'hydrogène phosphoré ?

Équivalents.....	} Ph = 32 H = 1
Densité de l'hydrogène.....	
Poids d'un litre d'air à 0° et sous la pression 760 <sup>mm</sup> .....	$\delta = 0,0692$  $= 1^{\text{gr}}, 293$

---

## PUBLICATIONS RÉCENTES.

---

1. BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da *B. Boncompagni*, socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio ordinario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tomo XIII, 1880.

GENNAIO-FEBBRAIO. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. *D. Smeraldo Borghetti Lucchese*, canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore. — *B. Boncompagni*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

MARZO. — Intorno ad un Trattato di Aritmetica del P. *D. Smeraldo Borghetti Lucchese*, canonico regolare della Congregazione del SS. Salvatore (continuazione). — *B. Boncompagni*.



member of the Senate of the royal University of Ireland.  
— Dublin, printed at the University press, by Ponsonby  
and Weldrick, 1881.

4. DIE TACHYMETRIE MIT BESONDERER BERUICKSICHTIGUNG  
DES TACHYMETERS, VON TICHY UND STARKE, FÜR TERRAIN  
UND TRACE-STUDIEN, bearbeitet von ANTON SCHELL, K. K.  
Professor. Mit 2 Tafeln und 27 Figuren. — Wien,  
Druck und Verlag von L.-W. Seidel und Sohn, 1880.

5. PRINCIPII FONDAMENTALI DELLA GEOMETRIA DEI TES-  
SUTI, per *Edoardo Lucas*. — Torino, tip. e lit. Camilla  
e Bertolero, via Ospedale, 18; 1880.

6. LA MÉTÉOROLOGIE APPLIQUÉE A LA PRÉVISION DU TEMPS.  
Leçon faite le 2 mars 1880 à l'École supérieure de Télé-  
graphie, par M. *E. Mascart*, professeur au Collège de  
France, directeur du Bureau central météorologique;  
recueillie par M. *Th. Moureaux*, météorologiste au  
Bureau central. — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-  
libraire, quai des Augustins; 1881.

7. *Académie des Sciences, des Lettres et des Arts  
d'Amiens*. — DELAMBRE ET AMPÈRE. Discours de récep-  
tion, suivi de notes et de pièces justificatives, et de plu-  
sieurs Lettres inédites de Delambre; par M. *Desboves*,  
agrégé et docteur ès sciences. — Amiens, librairie  
Hecquet, 32, rue Delambre; 1881.

#### TIRAGES A PART.

8. DÉVELOPPEMENTS, PAR RAPPORT AU MODULE, DES FONC-  
TIONS  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$  ET DE LEURS PUISSANCES; par M. *Désiré  
André*, ancien élève de l'École Normale. (*Extrait des*



Au lieu de chercher l'enveloppe de la droite MN, que nous appellerons  $\Sigma_4$ , nous allons chercher la polaire réciproque  $S_4$  de cette courbe par rapport à la conique donnée, c'est-à-dire le lieu du pôle de la droite MN par rapport à cette conique.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, et soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

ou

$$S = 0$$

l'équation de la conique donnée. On sait que cette équation peut aussi se mettre sous la forme

$$(1) \quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2FYZ + 2GZX + 2HXY = 0,$$

en posant

$$\frac{dS}{dx} = X, \quad \frac{dS}{dy} = Y, \quad \frac{dS}{dz} = Z,$$

$$A = bc - f^2, \quad B = ac - g^2, \quad C = ab - h^2;$$

$$F = gh - af, \quad G = hf - bg, \quad H = fg - ch.$$

Cela posé, une conique tangente à  $C_2$  au point  $(x', y', z')$  aura pour équation

$$S + (lx + my + nz)(xX' + yY' + zZ') = 0,$$

$X', Y', Z'$  étant ce que deviennent  $X, Y, Z$  quand on y remplace les coordonnées courantes par celles du point de contact.

Pour que cette conique soit circonscrite au triangle ABC, il faudra qu'on ait

$$a + lX' = 0; \quad b + mY' = 0; \quad c + nZ' = 0.$$

La droite MN a donc pour équation

$$\frac{ax}{X'} + \frac{by}{Y'} + \frac{cz}{Z'} = 0.$$





peut encore traiter la question de la manière sui-

nombre des droites MN qui passent par un point  $(x_1, y_1, z_1)$  (c'est-à-dire la classe de la courbe  $\Sigma_4$ ) est égal à celui des points correspondants P. Or ceux-ci sont donnés par les équations

$$S = 0, \\ \frac{ax_1}{X} + \frac{by_1}{Y} + \frac{cz_1}{Z} = 0,$$

la seconde représente une conique  $\Gamma_2$  circonscrite au triangle  $A_1 B_1 C_1$ , polaire du triangle donné par rapport à  $C_2$ . Les coniques  $\Gamma_2$  et  $C_2$  se coupent en quatre points : donc la courbe  $\Sigma_4$  est de la quatrième classe.

Réciproquement, une conique circonscrite au triangle  $\Delta_1$  et qui a pour équation

$$\frac{l}{X} + \frac{m}{Y} + \frac{n}{Z} = 0$$

coupe  $C_2$  en quatre points P, qui sont tels que les droites tangentes LM se rencontrent en un même point pour coordonnées

$$\frac{l}{a}, \quad \frac{m}{b} \quad \text{et} \quad \frac{n}{c}.$$

Le point  $(x_1, y_1, z_1)$  est sur  $\Sigma_4$ , deux des tangentes à  $C_2$  par ce point se réunissent en une seule; il en est de même, par suite, de deux des points d'intersection avec la conique correspondante  $\Gamma_2$  : donc ces deux courbes sont tangentes. Et réciproquement, si ces courbes sont tangentes, le point correspondant  $(x_1, y_1, z_1)$  est situé sur  $\Sigma_4$ . Or, la condition qui exprime que les deux coniques  $C_2$  et  $\Gamma_2$  sont tangentes s'écrit de la manière suivante :

$$(\theta\theta' - 9\Delta\Delta')^2 = 4(\theta^2 - 3\Delta\theta')(\theta'^2 - 3\Delta'\theta),$$





de l'équation  $x^2 + 1 = 2y^2$  sont données par les termes des fractions réduites d'ordre pair, la première étant  $\frac{1}{0}$ , de la fraction continue périodique dont le premier quotient incomplet est l'unité suivie de la période 2.

En désignant par

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{a_3}{b_3}$$

cinq réduites consécutives dont la première  $\frac{a_1}{b_1}$  est d'ordre pair, on aura

$$(1) \quad a_3 = 2m_2 + a_2, \quad b_3 = 2n_2 + b_2,$$

$$(2) \quad m_2 = 2a_2 + m_1, \quad n_2 = 2b_2 + n_1,$$

$$(3) \quad a_2 = 2m_1 + a_1, \quad b_2 = 2n_1 + b_1.$$

En multipliant les équations (2) par 2, les ajoutant aux équations (1), et de leurs sommes retranchant les équations (3), on a

$$a_3 = 6a_2 - a_1, \quad b_3 = 6b_2 - b_1.$$

D'après cela  $\frac{1}{1}, \frac{7}{5}$  donnent

$$x = 6.7 - 1 = 41, \quad y = 6.5 - 1 = 29;$$

$\frac{7}{5}, \frac{41}{29}$  donnent

$$x = 6.41 - 7 = 239, \quad y = 6.29 - 5 = 169.$$

Etc.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; J. Lissençon; A. Leinekugel; Rochetti, qui a résolu également la question 1339.

---

## Question 1350

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 480 ).

PAR M. MORET-BLANC.

*Trouver un nombre positif ayant la triple propriété d'être, ainsi que sa moitié, égal au produit de deux entiers consécutifs, le plus petit des facteurs de cette moitié étant lui-même égal au produit de deux entiers consécutifs.* (LIONNET.)

Soit  $x$  le plus petit des deux nombres entiers consécutifs dont le produit  $x^2 + x$  est le plus petit facteur de la moitié du nombre demandé : cette moitié est

$$(x^2 + x)(x^2 + x + 1) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x,$$

et le nombre demandé sera exprimé par

$$2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x.$$

Il faut que ce nombre soit le produit de deux nombres entiers consécutifs

$$2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x = y^2 + y,$$

d'où, en multipliant par 4 et ajoutant 1,

$$8x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 8x + 1 = (2y + 1)^2.$$

On aperçoit immédiatement la solution  $x = 1$ , d'où  $y = 3$ , ce qui donne le nombre

$$3 \times 4 = 12,$$

dont la moitié  $6 = 2 \times 3$ , le facteur  $2 = 1 \times 2$ .

Le procédé d'Euler pour déduire d'autres solutions de celle-là ne donne que des nombres fractionnaires ou la solution illusoire  $x = 0$ .

On trouve une infinité de nombres satisfaisant aux deux premières conditions. J'ai vérifié que, jusqu'à  $10^{25}$ , 12 est le seul de ces nombres dont le plus petit facteur de sa moitié soit le produit de deux nombres entiers consécutifs.

---

### Question 1354

voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 565);

PAR M. É. PECQUERY,

Élève au lycée du Havre.

#### *L'équation*

$$(1) \quad x^3 - (k - b + c)x^2 + (b - 2c)ax - ck = 0,$$

*dans laquelle  $a, b, c, k$  sont des entiers positifs, et satisfaisant aux conditions*

$$\begin{aligned} a^2 &> k > (a - 1)^2, \\ (a - 1)b &\geq (a^2 - k - 1)c, \end{aligned}$$

*ou bien aux conditions*

$$\begin{aligned} (a + 1)^2 &> k > a^2, \\ (a + 1)b &\geq (k - a^2 + 1)c, \end{aligned}$$

*ne peut avoir trois racines entières. Si deux racines sont imaginaires, l'une au moins des racines réelles est incommensurable.*

*La même proposition subsiste à l'égard de l'équation*

$$(2) \quad x^3 - (k - b - c)x^2 + (b + 2c)ax + ck = 0,$$

*dans laquelle les entiers  $a, b, c, k$ , tous plus grands que 0, satisfont à l'un quelconque des quatre systèmes de*

conditions qui suivent, savoir :

- 1°  $a^2 > c, \quad a^2 > k \geq (a-1)^2,$
- 2°  $c > a^2 > k, \quad (a+1)b \geq (a^2 - k - 1)c,$
- 3°  $(a+1)^2 \geq k > a^2 > c,$
- 4°  $c > a^2, \quad k > a^2, \quad (a-1)b \geq (k - a^2 + 1)c.$

*Dans chacun de ces cas, l'équation (2) a deux racines réelles, dont l'une, au moins, est incommensurable.*

(S. RÉALIS.)

La somme des racines de l'équation (1) étant nulle, si trois de ses racines sont entières, la quatrième le sera aussi.

Inversement, si l'une des racines n'est pas entière, les trois autres ne pourront être toutes trois entières.

Il suffit donc de démontrer que l'équation (1), satisfaisant à l'un des deux premiers systèmes de conditions, admet toujours une racine non entière.

De plus, le coefficient de la plus haute puissance de  $x$  étant l'unité, cette racine non entière sera incommensurable.

Substituons à  $x$  dans l'équation les trois valeurs successives  $-(a-1)$ ,  $-a$ ,  $-(a+1)$  et désignons par A, B, C les valeurs que prend le premier membre, on aura, toutes réductions faites,

$$A = (a-1)^2[(a-1)^2 - k] - b(a-1) + c(a^2 - k - 1),$$

$$B = (a^2 - k)(a^2 + c),$$

$$C = (a+1)^2[(a+1)^2 - k] + b(a+1) - c(k - a^2 + 1).$$

Si l'on tient compte du premier système de conditions, on voit que A et B sont de signes contraires ; si l'on tient compte du second, on voit de même que B et C sont de signes contraires. Donc, dans ces deux cas, l'équation (1)





**Question 1358**

( Voir même Tome, p. 96 );

PAR M. H. DU MONTEL,

Élève du lycée Saint-Louis.

*Les droites rectangulaires OX, OY (<sup>1</sup>) sont les axes d'une ellipse, M un point de la courbe; N le point où la normale en M rencontre l'axe OX; MQ la perpendiculaire abaissée du point M sur OY; MNP un triangle dont les côtés MP, NP sont respectivement égaux à MQ, NO : si l'on prend sur la bissectrice de l'angle MPN, et de chaque côté du point P, des longueurs PD, PD' égales entre elles et telles que  $PD^2 = MP \cdot PN$ , la circonférence passant par D et D' et ayant son centre sur OY coupera l'axe OX aux deux foyers de l'ellipse.*

(A. BOILLEAU.)

Soient F, F' les foyers de l'ellipse, et C le point où la normale MN, prolongée, rencontre l'axe OY.

On a

$$\frac{CN}{CM} = \frac{ON}{QM}, \quad \text{ou} \quad \frac{CN}{CM} = \frac{PN}{PM},$$

puisque  $ON = PN$  et  $QM = PM$ . Il s'ensuit que le point C appartient à la bissectrice de l'angle extérieur en P du triangle MPN, c'est-à-dire à la perpendiculaire à la droite DD' élevée au milieu P de cette droite. Donc le point C est le centre du cercle que l'on considère.

Cherchons la valeur du rayon CD de ce cercle.

Le triangle rectangle CPD donne

$$CD^2 = CP^2 + PD^2 = CP^2 + MP \cdot PN.$$

Mais, d'après une propriété connue, relative aux bissec-

(<sup>1</sup>) Le lecteur est prié de faire la figure.



1365. Démontrer que l'équation

$$x^{n-l} - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} - \dots = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre  $-a$  et  $+a$ . (ESCARV.)

1366. Démontrer que l'équation

$$x^{n-l} + \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} + \dots = 0$$

a toutes ses racines imaginaires, inégales et comprises dans l'intérieur d'un cercle de rayon égal à  $a$ . (ESCARV.)

1367. 1° Si une équation  $f(x) = 0$  est ordonnée et de la forme

$$f(x) = \varphi(x) + \alpha x^p - \beta x^{p-1} + \gamma x^{p-2} + \psi(x) = 0,$$

$\varphi$  et  $\psi$  n'ayant que des permanences et  $\alpha, \beta, \gamma$  étant des nombres positifs tels que  $\beta^2 = \alpha\gamma$ , l'équation n'a pas de racines réelles positives.

2° Si quatre coefficients consécutifs d'une équation sont  $b+c, b, c, b-c$ , de sorte que

$$f(x) = \dots (b+c) x^{p+1} + b x^p + c x^{p-1} + (b-c) x^{p-2} + \dots = 0,$$

l'équation a des racines imaginaires.

3° Si quatre coefficients consécutifs sont  $a, b, a, b$ , de telle sorte que

$$f(x) = \dots a x^{p+1} + b x^p + a x^{p-1} + b x^{p-2} + \dots = 0,$$

l'équation a, au moins, deux racines imaginaires.







---



---

**SUR UNE CLASSE DE SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE ;**

PAR M. V. JAMET,  
Professeur au lycée de Nice (<sup>1</sup>).

---

V. Dans tout ce qui va suivre, nous nous appuierons constamment sur le théorème suivant :

*Étant données deux courbes qui se coupent, leurs transformées par rayons vecteurs réciproques se coupent sous le même angle.*

Comme nous conviendrons d'admettre ce théorème, alors même que nous raisonnerons sur des courbes imaginaires, ou bien encore que nous considérerons le pôle de transformation comme imaginaire, il est bon d'en donner une démonstration analytique. Alors, quand nous énoncerons le théorème, nous ne ferons qu'énoncer le résultat du calcul suivant :

Soit une courbe quelconque. Je peux toujours considérer les trois coordonnées d'un de ses points comme des fonctions de la distance de ce point à un point fixe. Soient  $a, b, c$  les coordonnées de ce point fixe,  $x, y, z$  les coordonnées d'un point de la courbe. Nous pouvons toujours poser

$$x = a + \varphi(r),$$

$$y = b + \chi(r),$$

$$z = c + \psi(r),$$

$r$  désignant la distance des deux points  $(a, b, c)$  et  $(x, y, z)$ . Soit une seconde courbe dont les équations

---

(<sup>1</sup>) Voir même Tome, p. 344.

sont

$$\begin{aligned}x &= a + \varphi_1(r), \\y &= b + \chi_1(r), \\z &= c + \psi_1(r).\end{aligned}$$

Je suppose que ces deux courbes aient un point commun  $(x, y, z)$ . Soit  $V$  l'angle qu'elles font entre elles en ce point; cet angle satisfait à la relation

$$\cos V = \frac{\varphi'_1 \varphi'_1 + \chi'_1 \chi'_1 + \psi'_1 \psi'_1}{\sqrt{(\varphi'^2_1 + \chi'^2_1 + \psi'^2_1)(\varphi'^2_1 + \chi'^2_1 + \psi'^2_1)}}.$$

Les deux courbes transformées par rapport au point  $(a, b, c)$  sont représentées, la première par les équations

$$\begin{aligned}\xi &= a + \frac{k^4}{r^2} \varphi(r), \\ \eta &= b + \frac{k^4}{r^2} \chi(r), \\ \zeta &= c + \frac{k^4}{r^2} \psi(r),\end{aligned}$$

et la seconde par

$$\begin{aligned}\xi &= a + \frac{k^4}{r^2} \varphi_1(r), \\ \eta &= b + \frac{k^4}{r^2} \chi_1(r), \\ \zeta &= c + \frac{k^4}{r^2} \psi_1(r).\end{aligned}$$

Ces deux courbes ont un point commun qui est le transformé du point  $x, y, z$  et font entre elles, en ce point, un angle  $V'$  donné par la formule

$$\cos V' = \frac{\left(\frac{\varphi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3} \varphi_1\right) \left(\frac{\varphi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3} \varphi_1\right) + \left(\frac{\chi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3} \chi_1\right) \left(\frac{\chi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3} \chi_1\right) + \dots}{\sqrt{\left(\frac{\varphi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3} \varphi_1\right)^2 + \dots} \sqrt{\left(\frac{\varphi'_1}{r^2} - \frac{2}{r^3} \varphi_1\right)^2 + \dots}}.$$



en développant,

$$\frac{1}{r^4}(\varphi'\varphi'_1 + \dots) - \frac{2}{r^5} \frac{d}{dr}(\varphi\varphi_1 + \dots) + \frac{4}{r^6}(\varphi\varphi'_1 + \dots) \\ \sqrt{\frac{1}{r^4}(\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2) - \frac{4}{r^5}(\varphi\varphi' + \chi\chi' + \psi\psi') + \frac{4}{r^6}(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2)} \sqrt{\dots}$$

lais si, dans les fonctions  $\varphi, \chi, \psi, \varphi_1, \chi_1, \psi_1$ , on rem-  
place  $r$  par la valeur qui correspond au point commun  
des deux courbes, on trouve

$$\varphi = \varphi_1, \quad \chi = \chi_1, \quad \psi = \psi_1$$

$$\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2 = \varphi_1^2 + \chi_1^2 + \psi_1^2 = \varphi\varphi_1 + \chi\chi_1 + \psi\psi_1 = r^2,$$

1

$$\frac{2}{r^5} \frac{d}{dr}(\varphi\varphi_1 + \chi\chi_1 + \psi\psi_1) + \frac{4}{r^6}(\varphi\varphi_1 + \chi\chi_1 + \psi\psi_1) = 0,$$

$$\frac{4}{r^5}(\varphi\varphi' + \chi\chi' + \psi\psi') + \frac{4}{r^6}(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2) \\ = -\frac{2}{r^5} \frac{d}{dr}(r^2) + \frac{4}{r^4} = 0.$$

même,

$$-\frac{4}{r^5}(\varphi_1\varphi'_1 + \chi_1\chi'_1 + \psi_1\psi'_1) + \frac{4}{r^6}(\varphi_1^2 + \chi_1^2 + \psi_1^2) = 0.$$

la formule précédente se réduit donc à

$$\cos V' = \frac{\varphi'\varphi'_1 + \chi'\chi'_1 + \psi'\psi'_1}{\sqrt{(\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2)(\varphi_1'^2 + \chi_1'^2 + \psi_1'^2)}},$$

qui démontre le théorème.

Le calcul précédent ne suppose en rien que les quan-  
tités qui y figurent soient réelles : nous conviendrons  
donc de dire que le théorème est vrai, lorsque nous rai-  
sonnerons sur des points imaginaires.

Nous admettrons également, et dans tous les cas, les  
propositions suivantes, dont la démonstration analytique ne  
présente pas de difficulté :



déroun, en effet, la girocyclide définie par l'équation

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 2ax + 2by + 2c(z - c)]^2 \\ = 4Ax^2 + 4By^2$$

ou bien

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2]^2 + 4[x^2 + y^2 + (z - c)^2][ax + by + c(z - c)] \\ + 4[ax + by + c(z - c)]^2 = 4Ax^2 + 4By^2.$$

Considérons le cône

$$[ax + by + c(z - c)]^2 - Ax^2 - By^2 = 0.$$

On sait qu'il existe trois valeurs de  $\lambda$  telles qu'on ait identiquement

$$[ax + by + c(z - c)]^2 - Ax^2 - By^2 \\ = [Mx + Ny + P(z - c)][M'x + N'y + P'(z - c)] \\ - \lambda[x^2 + y^2 + (z - c)^2].$$

Ces valeurs sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a^2 - A + \lambda & ab & ac \\ ab & b^2 - B + \lambda & bc \\ ac & bc & c^2 + \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

lorsque  $c$  est réel, elles sont toutes les trois réelles, et l'une d'elles seulement donne, pour  $M, N, P, M', N', P'$ , des valeurs réelles.

Dans tous les cas, l'équation de la girocyclide s'écrit

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2]^2 + 4[x^2 + y^2 + (z - c)^2][ax + by + c(z - c)] \\ + 4[Mx + Ny + P(z - c)][M'x + N'y + P'(z - c)] \\ - 4\lambda[x^2 + y^2 + (z - c)^2] = 0,$$

ou bien

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2]\{x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 4[ax + by + c(z - c) - \lambda]\} \\ = -4[Mx + Ny + P(z - c)][M'x + N'y + P'(z - c)].$$

Cette dernière équation est le résultat de l'élimination de  $\mu$  entre les deux équations suivantes

$$(5) \quad x^2 + y^2 + (z - c)^2 = -4\mu [Mx + Ny + P(z - c)]$$

et

$$(6) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 4[ax + by + c(z - c) - \lambda] \\ = \frac{1}{\mu} [M'x + N'y + P'(z - c)], \end{cases}$$

et ces deux dernières équations représentent un cercle dont la position dans l'espace varie en même temps que la valeur de  $\mu$ . On obtient, en faisant varier  $\mu$ , une première série de sections cycliques : l'équation (5) montre que les sphères qui passent par une de ces sections et par le point singulier  $(0, 0, c)$  ont leurs centres sur une droite fixe passant par ce point et perpendiculaire à l'un des plans cycliques du cône transformé. On obtiendra it une seconde série en faisant varier  $\nu$  dans les deux équations suivantes

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = -4\nu [M'x + N'y + P'(z - c)]$$

et

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 4[ax + by + c(z - c) - \lambda] \\ = \frac{1}{\nu} [Mx + Ny + P(z - c)]. \end{aligned}$$

Cherchons maintenant l'enveloppe des plans cycliques d'une même série. Le plan de la courbe représentée par les équations (5) et (6) a lui-même pour équation

$$\begin{aligned} 4[ax + by + c(z - c) - \lambda] \\ = 4\mu [Mx + Ny + P(z - c)] + \frac{1}{\mu} [M'x + N'y + P'(z - c)] \end{aligned}$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned} ax + by + c(z - c) - \lambda &= H, \\ Mx + Ny + P(z - c) &= K, \\ M'x + N'y + P'(z - c) &= L. \end{aligned}$$

cette équation devient

$$4K\mu^2 - 4H\mu + L = 0.$$

L'enveloppe de ce plan a pour équation

$$H^2 - KL = 0,$$

c'est donc un cône du deuxième ordre.

(*A suivre.*)

---

## EXERCICES DE GÉOMÉTRIE ;

PAR M. ED. DEWULF,  
Lieutenant-Colonel du Génie.

---

I. *Notations.* — 1. Nous employons les notations suivantes :

$$(1, 2, 3, 4) [5, 6, 7, 8, \dots]$$

représente un faisceau de coniques, dont la base est formée par les points 1, 2, 3, 4 et dont les courbes sont déterminées par les points 5, 6, 7, 8, ... ;

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) [9, 10, 11, \dots]$$

représente un faisceau de cubiques, dont la base est formée par les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et dont les courbes sont déterminées par les points 9, 10, 11, ... ;

$$(1^2, 2, 3, 4, 5, 6) [7, 8, 9, \dots]$$

représente un faisceau de cubiques, dont la base est formée par le point double 1 et les points simples 2, 3, 4, 5, 6, et dont les courbes sont déterminées par les points 7, 8, 9, ... ; et ainsi de suite.

Cette Notation est empruntée au Mémoire de M. l'amiral de Jonquières, intitulé : *Essai sur la génération*

*des courbes géométriques* (t. XVI des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*).

2.  $[x - y]^n$  représente une transformation birationnelle de l'ordre  $n$  entre les points  $x$  et  $y$ ; la théorie générale de ces transformations, exposée d'après les Mémoires de M. Cremona, se trouve dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* (année 1872, p. 206 et suiv.)

3. Si l'on a sur une droite une série de couples de points formant une involution  $i$ , et si l'on joint ces couples de points à point  $O$  d'un cercle  $M$ , chaque couple de points conjugués détermine une corde de  $M$ , toutes ces cordes concourent en un point  $p$  (CHASLES, *Géométrie supérieure*, p. 490). Nous disons que ce point  $p$  représente l'involution  $i$ , par rapport au cercle  $M$  et à un de ses points  $O$ .

II. *Étudier la relation qui existe entre les systèmes de points  $x$  et  $y$  qui rendent projectifs le faisceau de coniques  $(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7]$  et le faisceau de droites  $y[4', 5', 6', 7']$ .*

1. A un point déterminé  $x$  correspondent tous les points d'une conique  $C_x$  circonscrite au quadrilatère  $4'5'6'7'$  et capable du rapport anharmonique des tangentes au point 1 des coniques

$$1.2.3.x.4, \quad 1.2.3.x.5, \quad 1.2.3.x.6, \quad 1.2.3.x.7.$$

Pour déterminer les points  $x$  qui correspondent à un point donné  $y$ , nous désignons par  $i'_4, i'_5, i'_6, i'_7$  les involutions déterminées sur une droite quelconque  $l$  par les quatre faisceaux de coniques  $(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 6), (1, 2, 3, 7)$ , et par  $p_4, p_5, p_6, p_7$  les quatre

points qui représentent respectivement ces involutions par rapport à un cercle  $M$  et à un de ses points  $O$ . Décrivons sur  $p_4 p_5 p_6 p_7$  une conique  $C_2^p$  capable du rapport anharmonique du faisceau  $\gamma[4', 5', 6', 7']$ , et soit  $p$  un point quelconque de cette conique. Chaque point  $p$  détermine quatre cordes  $pp_4, pp_5, pp_6, pp_7$  de  $M$ , et ces cordes, projetées de  $O$  sur  $l$ , déterminent sur cette droite quatre couples de points en involution  $s_4 t_4, s_5 t_5, s_6 t_6, s_7 t_7$ . Les coniques  $(1, 2, 3, 4, s_4, t_4)$ ,  $(1, 2, 3, 5, s_5, t_5)$ ,  $(1, 2, 3, 6, s_6, t_6)$ ,  $(1, 2, 3, 7, s_7, t_7)$  se coupent en un même point  $x$ . Donc, à un point  $p$  correspond un seul point  $x$ , et pour le déterminer il suffit de deux des coniques ci-dessus,  $(1, 2, 3, 4, s_4, t_4)$  et  $(1, 2, 3, 5, s_5, t_5)$  par exemple.

Supposons maintenant que le point  $p$  parcourt la conique  $C_2^p$ ; les droites  $pp_4, pp_5$  engendrent deux faisceaux projectifs, dont les rayons correspondants déterminent sur  $l$  deux involutions projectives  $s_4 t'_4, s'_4 t'_4, s''_4 t''_4, \dots, s_5 t'_5, s'_5 t'_5, s''_5 t''_5, \dots$ , et les coniques  $(1, 2, 3, 4, s_4, t_4)$ ,  $(1, 2, 3, 4, s'_4, t'_4)$ ,  $(1, 2, 3, 5, s_5, t_5)$ ,  $(1, 2, 3, 5, s'_5, t'_5), \dots$  forment deux faisceaux projectifs dont les courbes correspondantes engendrent une courbe du quatrième ordre  $C_4$ , ayant trois points doubles en 1, 2, 3 et passant par les points simples 4, 5 et aussi par les points simples 6 et 7. Quand le point  $p$  parcourt la conique  $C_2^p$ , le point  $x$  décrit la courbe  $C_4$ ; et, comme à tous les points  $\gamma$  d'une conique circonscrite à  $4' 5' 6' 7'$  correspondent tous les points  $p$  de  $C_2^p$ , on peut dire qu'à tous les points  $\gamma$  d'une conique circonscrite à  $4' 5' 6' 7'$  correspondent tous les points  $x$  d'une courbe  $C_4$ , ayant des points doubles en 1, 2, 3 et passant par les points simples 4, 5, 6, 7.

2. Les coniques  $(4', 5', 6', 7')$  et les quartiques  $C_4$  se

correspondent une à une et forment deux faisceaux projectifs; le lieu géométrique  $C_6$  des intersections des courbes correspondantes de ces faisceaux est aussi *le lieu géométrique des points  $x$  qui rendent projectifs les deux faisceaux*

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7] \quad \text{et} \quad x[4', 5', 6', 7'].$$

Cette sextique a des points doubles aux points 1, 2, 3 et passe aux points simples 4, 5, 6, 7, 4', 5', 6', 7'.

3. Supposons que les points 4', 5', 6', 7' se confondent respectivement avec 4, 5, 6, 7; la courbe  $C_6$  est le lieu des points  $x$  qui rendent projectifs les deux faisceaux  $(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7]$  et  $x[4, 5, 6, 7]$ .

A chaque point  $x$  de cette courbe correspond une cubique du réseau, dont la base est formée par les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et cette courbe a un point double en  $x$ ; en d'autres termes, le lieu géométrique des points  $x$  est le lieu géométrique des points doubles des cubiques du réseau (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Ce lieu géométrique ne doit pas changer si, au lieu de prendre les trois points 1, 2, 3, on prend trois quelconques des sept points donnés pour former la base du faisceau générateur de coniques. Nous avons donc démontré le théorème suivant :

*Le lieu géométrique des points doubles des courbes du réseau de cubiques (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), c'est-à-dire la jacobienne de ce réseau, est une courbe du sixième ordre qui a un point double en chacun des sept points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.*

On peut voir directement que cette jacobienne a des points doubles en chacun des sept points donnés; on peut, en effet, construire une cubique ayant un point



double en un des sept points donnés et passant par les six autres.

On peut encore déterminer directement vingt et un couples de points de cette jacobienne, car le réseau de cubiques (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) renferme les vingt et une courbes composées, formées de la conique déterminée par cinq des sept points donnés et par la droite qui joint les deux points restants, et les points d'intersection de cette conique et de cette droite appartiennent à la jacobienne. Ces quarante-deux points peuvent être imaginaires par couples et se construisent au moyen de la règle et du compas.

Ajoutons encore qu'on peut tracer directement les tangentes à la jacobienne en chacun de ces points doubles 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Pour le faire voir, il suffit de démontrer que ces tangentes sont celles des sept cubiques qui ont respectivement chacun de ces sept points pour point double.

Cela résulte du théorème général suivant, démontré géométriquement par M. Cremona dans son *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (96, d, p. 75) :

*Étant donné un réseau de courbes, passant par un même point O, la hessienne du réseau passe deux fois par le point O, et ses deux tangentes en ce point sont celles de la courbe du réseau pour laquelle O est un point double.*

On sait que, dans le cas où l'ordre des courbes qui constituent le réseau est le même pour toutes ces courbes, la hessienne se confond avec la jacobienne, et c'est ce qui a lieu dans la question dont nous nous occupons.

Nommons 8, 9, 10, 11, 12, 13 six quelconques des



autres points. Donc, les courbes d'un faisceau de cubiques  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$  ont douze points doubles qui peuvent se construire au moyen de la règle et du compas.

III. *Étudier la relation qui existe entre les systèmes de points qui rendent projectifs les deux faisceaux*

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad y[4', 5', 6', 7', 8'].$$

1. A un point  $x$  donné correspond un seul point  $y$  que l'on détermine en décrivant sur  $4'5'6'7'$  une conique capable du rapport anharmonique des coniques

$$(1, 2, 3, x), [4, 5, 6, 7],$$

puis, sur  $4'5'6'8'$  une seconde conique capable du rapport anharmonique des coniques

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 8].$$

Ces coniques ont en commun les points  $4', 5', 6'$  et se coupent en un quatrième point qui est le point  $y$  cherché.

Supposons que l'on donne un point  $y$ , et soit  $x$  un point correspondant à  $y$ , que nous allons déterminer en le supposant d'abord connu, pour établir notre raisonnement. Chacune des coniques

$$(1, 2, 3, x, 4), (1, 2, 3, x, 5), (1, 2, 3, x, 6), \\ (1, 2, 3, x, 7), (1, 2, 3, x, 8)$$

marque sur une droite quelconque  $l$  un couple de points et ces cinq couples de points sont en involution, puisqu'ils sont déterminés par des coniques du faisceau  $(1, 2, 3, x)$ ; de plus, cette involution est projective au faisceau

$$y[4', 5', 6', 7', 8'];$$

par hypothèse, chacun de ces couples de points appartient respectivement aux cinq involutions  $i_4, i_5, i_6, i_7, i_8$ , déterminées sur  $l$  par les cinq faisceaux

$$(1, 2, 3)[4, 5, 6, 7, 8].$$

Pour trouver le point  $x$ , il faut donc déterminer, dans chacune des involutions  $i_4, i_5, i_6, i_7, i_8$  un couple de points tel que les cinq couples forment une involution projective au faisceau  $\gamma[4', 5', 6', 7', 8']$ .

Soient  $p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$  les cinq points représentatifs des cinq involutions par rapport à un cercle  $M$  et à un de ses points  $O$ . Si l'on admet que l'on connaisse un point  $p$  tel que les deux faisceaux  $p[p_4, p_5, p_6, p_7, p_8]$  et  $\gamma[4', 5', 6', 7', 8']$  soient projectifs, les cinq rayons  $pp_i$  ( $i = 4, 5, 6, 7, 8$ ) déterminent sur  $M$  cinq cordes qui, projetées du point  $O$  sur  $l$ , donnent les cinq couples de points cherchés.

Or, nous savons que les points  $p$  et  $\gamma$  forment une transformation birationnelle  $[p - \gamma]^5$  du cinquième ordre, dont les points fondamentaux pour la figure ( $p$ ) sont  $p_4^2, p_5^2, p_6^2, p_7^2, p_8^2$ , et  $p_0^2$ ,  $p_0$  étant le point *adjoint* au groupe  $(p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)$  ou le point qui correspond à tous ceux de la conique  $(4', 5', 6', 7', 8')$ , et pour la figure ( $\gamma$ ) les points  $4'^2, 5'^2, 6'^2, 7'^2, 8'^2$  et  $o'^2$ ,  $o'$  étant le point adjoint au groupe  $(4', 5', 6', 7', 8')$  (<sup>1</sup>).

Nous savons aussi que les points  $p$  et  $x$  forment une transformation birationnelle  $[p - x]^2$  du second ordre, dont les points fondamentaux sont pour la figure ( $x$ ) les points 1, 2, 3, et pour la figure ( $p$ ) les points  $e_{2,3}, e_{1,3}, e_{1,2}$ , projections du point  $O$  sur  $M$  des points

(<sup>1</sup>) RUDOLPH STURM, *Das Problem der Projectivität* (*Mathematische Annalen*, t. I), ou DEWELF et SCHOUTE, *Construire une courbe unicursale du quatrième ordre, etc.* (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1879; 2<sup>e</sup> semestre).

d'intersection des droites 2 - 3, 1 - 3, 1 - 2 avec la transversale  $l$  <sup>(1)</sup>.

Donc à un point  $x$  correspond un seul point  $y$ .

Quand le point  $x$  décrit une droite quelconque, le point  $p$  correspondant de  $[p - x]^2$  décrit une conique  $C$  passant par les points  $e_{2,3}, e_{1,3}, e_{1,2}$ , et ne passant généralement par aucun des points fondamentaux de la figure (3) dans  $[p - y]^5$ . Par suite, à la conique  $C$ , considérée comme appartenant à la figure ( $p$ ) dans  $[p - y]^5$ , correspond, dans la figure ( $y$ ) de cette même transformation, une courbe  $C_{10}$  du dixième ordre, ayant des points quadruples en  $o'^4, 4'^4, 5'^4, 6'^4, 7'^4, 8'^4$ , et des points simples aux points  $l'_{2,3}, l'_{1,3}, l'_{1,2}$  qui correspondent aux points  $e$  de la figure ( $p$ ) dans la transformation  $[p - y]^5$ .

Il résulte de là que *les points  $x$  et  $y$  qui satisfont à la question forment une transformation birationnelle du dixième ordre dont les points fondamentaux sont : pour la figure ( $y$ ),  $o'^4, 4'^4, 5'^4, 6'^4, 7'^4, 8'^4, e'_{2,3}, e'_{1,3}, e'_{1,2}$ , et pour la figure ( $x$ ), les points quintuples  $1^5, 2^5, 3^5$  et les points doubles  $p_0'^2, p_4'^2, p_5'^2, p_6'^2, p_7'^2, p_8'^2$ , qui, dans la figure ( $x$ ), correspondent aux points  $p_0, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$  de la figure ( $p$ ) de cette dernière transformation.*

2. La transformation du dixième ordre  $[x - y]^{10}$  a douze points doubles. Donc :

*Il y a douze points  $x$  qui rendent projectifs les faisceaux*

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad x[4', 5', 6', 7', 8'].$$

3. Supposons maintenant que les points  $4', 5', 6', 7', 8'$  se confondent respectivement avec les points  $4, 5, 6, 7, 8$ .

---

(<sup>1</sup>) DEWULF et SCHOUTE, *loc. cit.* (Bulletin, 1879).

## Les deux faisceaux

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad y[4, 5, 6, 7, 8],$$

quand on prend pour  $x$  et  $y$  des points correspondants de la transformation  $[x - y]^{10}$ , engendrent toutes les cubiques du faisceau de ces courbes déterminé par les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Cette transformation  $[x - y]^{10}$  ayant douze points doubles, il existe douze points  $x$  qui rendent projectifs les deux faisceaux

$$(1, 2, 3, x)[4, 5, 6, 7, 8] \quad \text{et} \quad x[4, 5, 6, 7, 8].$$

Chacun de ces douze points détermine une cubique du faisceau (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) et est un point double de ce faisceau. Donc :

*Dans un faisceau de cubiques, il y a douze courbes qui ont un point double.*

4. Pour construire ces douze points, remarquons qu'à un faisceau de droites passant par  $e_{1,2}$  de la figure ( $p$ ) de  $[p - x]^2$  correspond, dans la figure ( $x$ ) de cette transformation, un faisceau de droites passant par le point 3, et dans la transformation  $[p - y]^5$  un faisceau de courbes du cinquième ordre  $C_5$ , ayant toutes des points doubles aux points 0, 4, 5, 6, 7, 8. Ces deux faisceaux de droites  $e_{1,2}$  et de quintiques sont projectifs et engendrent une courbe  $C_6$  du sixième ordre, qui a des points doubles aux points  $0^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$  et qui renferme les points cherchés.

De même un faisceau de droites passant par  $e_{1,3}$  conduit à une courbe  $C'_6$  ayant des points doubles en  $0^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$  et renfermant les points cherchés.

Ces courbes  $C_6$  et  $C'_6$  ont en commun les points doubles  $0^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2$ , qui sont étrangers à la

question; leurs  $6 \times 6 - 4 \times 6 = 12$  autres points d'intersection sont donc les douze points cherchés.

On peut tracer les courbes  $C_6$  et  $C'_6$  comme nous l'avons indiqué ailleurs <sup>(1)</sup>.

La construction des points doubles des courbes d'un faisceau de cubiques offre de l'intérêt, parce que les courbes déterminées par ces douze points servent de limite ou de transition entre des groupes de courbes du faisceau qui ont des formes différentes.

Janvier 1880.

### QUESTION.

Combien existe-t-il de courbes rationnelles (unicursales) du quatrième ordre qui ont deux points doubles en  $a_1$  et  $a_2$  et qui passent par les sept points simples 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

PAR M. ED. DEWULF,  
Lieutenant-Colonel du Génie.

Les propriétés de la jacobienne d'un réseau de courbes permettent de résoudre très simplement ce problème.

On sait que la jacobienne d'un réseau de courbes de l'ordre  $n$  est de l'ordre  $3(n - 1)$  et qu'un point multiple de l'ordre  $i$ , commun à toutes les courbes du réseau, est de l'ordre  $3i - 1$  pour la jacobienne.

Laissons de côté le point 7; les quartiques qui ont un point double en chacun des points  $a_1$  et  $a_2$  et qui passent par les points simples 1, 2, 3, 4, 5, 6 forment un ré-

<sup>(1)</sup> *Construction d'une courbe unicursale du quatrième ordre, etc.* (*Bulletin des Sciences mathématiques*; 1879, 2<sup>e</sup> semestre).





NOTE SUR LA QUESTION 593 <sup>(1)</sup>;

PAR M. E. CATALAN.

Rappelons d'abord la première partie de l'énoncé :

THÉORÈME. — *Étant donnée une parabole ABCDE, du troisième ordre, représentée par*

$$Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

*on fait passer, par les extrémités A, C, E de trois or-*

A' B' C' D' E' F' G'

*données équidistantes, la parabole du second ordre, dont l'équation aurait la forme*

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

*Ces courbes déterminent deux segments curvilignes ABCA, CDEC, équivalents entre eux.*

---

(<sup>1</sup>) *Nouvelles Annales*, 1<sup>re</sup> série, t. XVII, p. 5, 205 et 207. On peut consulter, sur le même sujet : *Association française pour l'avancement des Sciences*, sessions de 1879 et 1880; *Bulletin de la Société philomathique de Paris* (1880, Collignon); *Memoires de l'Académie de Belgique*, t. XLIII; etc.

Cette proposition peut être ainsi modifiée et généralisée.

Soit  $ABC \dots EFG$  une parabole, d'ordre impair, représentée par

$$Y = Ax^{2n+1} + Bx^{2n} + \dots + Gx + H;$$

et soit  $AaBb \dots FfG$  la parabole, d'ordre pair, déterminée par les  $2n + 1$  points  $A, B, \dots, F, G$  ayant, deux à deux, leurs abscisses égales et de signes contraires <sup>(1)</sup>.

Cela posé, les trapèzes paraboliques  $A'AB \dots FGG'$ ,  $A'AaBb \dots FfGG'$  sont équivalents.

Appelons  $a, b, \dots, h$  les abscisses des points  $F, G, \dots$ ; et posons

$$f(x) = Ax(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) \dots (x^2 - h^2).$$

Il est visible que l'équation de la seconde parabole est

$$y = Y - f(x) \quad (2).$$

Soient  $P, p$  les aires des deux trapèzes. On a

$$P = \int_{-a}^{+a} Y dx, \quad p = \int_{-a}^{+a} y dx;$$

puis

$$P - p = \int_{-a}^{+a} f(x) dx.$$

D'après la forme de  $f(x)$ , les éléments de la dernière intégrale sont, deux à deux, égaux et de signes contraires; donc cette intégrale est nulle <sup>(3)</sup>, et

$$P = p.$$

<sup>(1)</sup> Le point  $D$ , situé sur l'ordonnée moyenne, fait exception.

<sup>(2)</sup> En outre, toutes les paraboles d'ordre  $2n + 1$ , passant aux points  $A', B', \dots, F', F'$ , sont représentées par

$$y = f(x).$$

<sup>(3)</sup> Elle représente l'aire commune de toutes les paraboles dont il est question dans la Note précédente.

COROLLAIRE I. — *Les segments curvilignes correspondants, AaB, FfG, BbC, EeF, ... sont équivalents deux à deux.*

COROLLAIRE II. — *Les trapèzes paraboliques B'BFF', B'BbCc ... eFf', ... sont équivalents deux à deux.*

*Remarque sur les courbes paraboliques.* — La parabole d'ordre  $n$ , déterminée par  $n + 1$  points  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ , ...,  $(x_n, y_n)$  a pour équation, comme l'on sait,

$$y = f(x) \left[ \frac{y_0}{(x - x_0)f'(x_0)} + \frac{y_1}{(x - x_1)f'(x_1)} + \dots + \frac{y_n}{(x - x_n)f'(x_n)} \right],$$

en supposant

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \quad (1).$$

Cela posé :

*Toutes les paraboles d'ordre  $n + 1$ , passant en ces  $n + 1$  points, sont représentées par*

$$y = f(x) \left[ \frac{y_0}{(x - x_0)f'(x_0)} + \dots + \frac{y_n}{(x - x_n)f'(x_n)} + A \right].$$

*2° Toutes les paraboles d'ordre  $n + 2$ , passant en ces mêmes points, sont représentées par*

$$y = f(x) \left[ \frac{y_0}{(x - x_0)f'(x_0)} + \dots + \frac{y_n}{(x - x_n)f'(x_n)} + Ax + B \right].$$

Liège, 31 mai 1881.

---

(1) D'après la *formule d'interpolation de Lagrange*, ou plutôt, par la *théorie de la décomposition des fractions rationnelles*.

## NOTE SUR UN SYSTÈME DE COURBES ORTHOGONALES ET HOMOFOCALES ;

PAR M. A. LEGOUX,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Les courbes qui font le sujet de cette Note sont représentées par l'équation

$$(1) \quad \frac{x^2}{\lambda f - a} + \frac{y^2}{\lambda f - b} = 1,$$

où  $\lambda$  est un paramètre variable,  $f$  une fonction de  $x$  et de  $y$ ,  $a$  et  $b$  des constantes.

Ces courbes jouissent des propriétés suivantes :

1° Il en passe deux par un point quelconque du plan.

2° Elles ont une enveloppe qui est identique à celle des coniques représentées par l'équation

$$(2) \quad \frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} = 1.$$

Cette enveloppe se compose donc d'un système de quatre droites imaginaires passant par les points circulaires de l'infini.

Il résulte de là que, quelle que soit la fonction  $f$ , toutes les courbes représentées par l'équation (1) ont des foyers qui coïncident avec les foyers des coniques représentées par l'équation (2).

3° Les courbes représentées par l'équation (1) ne sont pas orthogonales en général. Il faut pour cela que la fonction  $f$  satisfasse à une équation aux dérivées partielles, qu'on obtient sans peine en exprimant la condi-

tion d'orthogonalité, et qui est la suivante

$$(ab + bx^2 + ay^2)(p^2 + q^2) = 2f(bpx + aqy),$$

où  $p$  et  $q$  représentent  $\frac{df}{dx}$ ,  $\frac{df}{dy}$ .

Si l'on fait  $a = 0$  dans l'équation (1), cette équation devient

$$(3) \quad x(p^2 + q^2) = 2fp.$$

En appliquant les formules connues pour l'intégration des équations aux dérivées partielles, on trouve

$$p = \alpha x, \quad q = \sqrt{2\alpha f - \alpha^2 x^2},$$

$\alpha$  représentant une constante arbitraire. Substituant dans  $df = p dx + q dy$ , on a

$$df = \alpha x dx + \sqrt{2\alpha f - \alpha^2 x^2} dy,$$

d'où

$$dy = \frac{df - \alpha x dx}{\sqrt{\alpha} \sqrt{2f - \alpha x^2}},$$

d'où enfin

$$(4) \quad 2f = \alpha [x^2 + (y + \beta)^2],$$

$\beta$  étant une autre constante. C'est une intégrale complète de l'équation (3). Si l'on remplace  $f$  par cette valeur dans l'équation (1), on obtient des quartiques bicirculaires; mais, si l'on remplace  $f$  par l'intégrale générale, à cause de la fonction arbitraire qui entre dans cette intégrale, on aura une infinité de systèmes orthogonaux.

On sait que l'on obtient l'intégrale générale en éliminant  $\alpha$  et  $\beta$  entre l'équation (4) et les deux suivantes,

$$\beta = \varpi(\alpha).$$

$$\frac{df}{d\alpha} + \frac{df}{d\beta} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

où  $\varpi$  est une fonction arbitraire.

Si l'on pose, par exemple,  $\beta = x^m$ , on en déduira

$$2f = \left[ \frac{-(m+1)y + \sqrt{(m+1)^2 y^2 - (2m+1)(x^2 + y^2)}}{2m+1} \right]^{\frac{1}{m}} \\ \times \left\{ x^2 + \left[ \frac{m y + \sqrt{(m+1)^2 y^2 - (2m+1)(x^2 + y^2)}}{2m+1} \right]^2 \right\}.$$

Pour  $m = 1$ , on a

$$27f = -y(y^2 + 9x^2) \pm (y^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

En mettant à la place de  $f$  dans l'équation (1) cette dernière valeur, on trouve un système de courbes orthogonales du douzième ordre, qui ont pour points quadruples les points circulaires de l'infini.

## DÉMONSTRATION DE PROPOSITIONS ÉNONCÉES

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 178);

PAR M. S. RÉALIS.

1<sup>o</sup> Si l'équation

$$x^3 + Px + Q = 0$$

admet la racine  $a$ , son premier membre est le produit de deux facteurs tels que  $x - a$ ,  $x^2 + ax + m$ , où  $m$  est nécessairement entier si  $P$ ,  $Q$ ,  $a$  sont entiers.

On a donc

$$P = -a^2 + m, \quad Q = -am,$$

et par suite

$$P^2 - 4Qa = (a^2 + m)^2.$$

$$(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) = (a^3 - 4ma^2 - m^2)^2 \\ = [5(a^2 - 4m)^2 - (2a^2 - 9m)^2]^2 \\ = [(a^2 - 2m)^2 - 5m^2]^2,$$

$b$  et  $c$  étant les deux autres racines de l'équation.

2° Si les trois racines  $a, b, c$  sont entières, l'une d'elles est nécessairement un nombre pair (à cause de  $a + b + c = 0$ ). On peut donc poser

$$a = 2\alpha, \quad b = -\alpha + \beta, \quad c = -\alpha - \beta,$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant entiers.

On aura donc

$$P = -(3\alpha^2 + \beta^2), \quad Q = -2\alpha(\alpha^2 - \beta^2),$$

et par suite

$$P^2 - 4Qa = (5\alpha^2 - \beta^2)^2 = [(5\alpha - 2\beta)^2 - 5(2\alpha - \beta)^2]^2,$$

$$\begin{aligned} P^2 - 4Qb &= (\alpha^2 + 4\alpha\beta - \beta^2)^2 \\ &= [5\alpha^2 - (2\alpha - \beta)^2]^2 = [(\alpha + 2\beta)^2 - 5\beta^2]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^2 - 4Qc &= (\alpha^2 - 4\alpha\beta - \beta^2)^2 \\ &= [5\alpha^2 - (2\alpha + \beta)^2]^2 = [(\alpha - 2\beta)^2 - 5\beta^2]^2. \end{aligned}$$

En outre,

$$(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) = [(\alpha^2 - \beta^2)^2 - 16\alpha^2\beta^2]^2.$$

3° Deux racines  $b, c$  étant exprimées par des nombres complexes entiers, la troisième racine  $a$  ne peut être qu'un nombre pair.

On peut donc poser

$$a = 2\alpha, \quad b = -\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad c = -\alpha - \beta\sqrt{-1},$$

d'où

$$P = -(3\alpha^2 - \beta^2), \quad Q = -2\alpha(\alpha^2 + \beta^2),$$

et par suite

$$P^2 - 4Qa = (5\alpha^2 + \beta^2)^2,$$

$$\begin{aligned} (P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) &= [5(2\alpha\beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2]^2 \\ &= [5(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha^2 - 2\beta^2)^2]^2 \\ &= [(\alpha^2 + 9\beta^2)^2 - 5(4\beta^2)^2]^2 \\ &= [(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 16(\alpha\beta)^2]^2. \end{aligned}$$

4° Nous avons d'abord, par identité,

$$(P^2 - 4Qa)(P^2 - 4Qb)(P^2 - 4Qc) = (P^3 + 8Q^2)^2.$$

Si  $P$  et  $Q$  sont entiers, et que la quantité

$$-(4P^3 + 27Q^2)$$

soit égale à un carré  $R^2$ , il est visible que

$$\begin{aligned} \pm (P^3 + 8Q^2) &= \frac{\pm 5Q^2 \mp R^2}{4} \\ &= \frac{\pm (5Q + 2R)^2 \pm 5(2Q + R)^2}{4}, \end{aligned}$$

formules où l'on choisira les signes supérieurs, ou les signes inférieurs, de manière que chaque membre soit positif. On peut prouver d'ailleurs qu'un nombre entier compris dans la forme  $\frac{5u^2 - v^2}{4}$  est compris aussi dans la forme  $5u^2 - v^2$ ; de même pour un entier compris dans la forme  $\frac{u^2 - 5v^2}{4}$  (voir la *Théorie des nombres* de Legendre, t. I, p. 205. Du reste, la preuve dont il s'agit peut aussi se tirer de formules directes, sans rien emprunter à la théorie des nombres).

Si c'est la quantité  $4P^3 + 27Q^2$  qui est égale à un carré  $R^2$ , auquel cas  $Q$  et  $R$  sont nécessairement des nombres pairs, on a

$$P^3 + 8Q^2 = \frac{5Q^2 + R^2}{4},$$

où le second membre est évidemment un nombre de la forme  $5u^2 + v^2$ .

L'identité qui justifie et complète la proposition énoncée à la fin de la *Remarque* consiste dans la formule

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = kx^2.$$



dan laquelle

$$z = 3x^2 + \beta^2,$$

$$k = A^2 + (A + B + C)^2 + C^2,$$

$$z_1 = A(2x)^2 + B2x(x - \beta) + C(x - \beta)^2,$$

$$z_2 = A(-x + \beta)^2 + B(-x + \beta)(x + \beta) + C(x + \beta)^2,$$

$$z_3 = A(x + \beta)^2 + B(x + \beta)2x + C(2x)^2.$$

Cette formule peut s'écrire

$$\left(\frac{z_1}{z}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{z}\right)^2 = k.$$

De la sorte, le second membre est indépendant de  $\alpha$  et  $\beta$ , et peut représenter tout nombre égal à la somme de trois carrés entiers, tandis que le premier membre peut représenter, d'une infinité de manières, une somme de trois carrés rationnels.

## NOTE SUR DES FORMULES DE JOACHIMSTHAL;

PAR M. A. DROZ.

Dans le *Journal de Crelle* (*Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie*, t. XL), Joachimsthal a donné deux formules pour la surface du triangle dont on connaît les équations des trois côtés, et pour le volume du tétraèdre si l'on connaît de même les équations des quatre plans.

Mon intention dans cette Note est de donner une démonstration très simple de ces deux formules.

Soient

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

( 412 )

Je représente par  $\alpha_{\varphi\psi}$  le coefficient de  $a_{\varphi\psi}$  dans le déterminant  $\Delta$ .

On sait que

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^{n-1}$$

(BINET et CAUCHY, *Journal de l'École Polytechnique*  
*Expression de la surface S du triangle compris entre les trois droites*

$$(1) \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$

$$(2) \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$

$$(3) \quad a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0.$$

Si  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  sont les coordonnées des points d'intersection des droites (23), (31), (12), on a

$$x_1 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}}, \quad y_1 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}},$$

$$x_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{23}}, \quad y_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{23}},$$

$$x_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}}, \quad y_3 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}}.$$

Mais

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha_{13}\alpha_{23}\alpha_{33}} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

$$(I) \quad 2S = \frac{\Delta^2}{\alpha_{13}\alpha_{23}\alpha_{33}}.$$

*Expression du volume V du tétraèdre compris entre*

*les quatre plans*

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\
 (2) \quad & a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\
 (3) \quad & a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0, \\
 (5) \quad & a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} = 0.
 \end{aligned}$$

Soient  $x_1, y_1, z_1$ ;  $x_2, y_2, z_2$ ;  $x_3, y_3, z_3$ ;  $x_4, y_4, z_4$  les coordonnées des points d'intersection des plans (234), (341), (412), (123); on aura

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{a_{11}}{a_{14}}, & y_1 &= \frac{a_{12}}{a_{14}}, & z_1 &= \frac{a_{13}}{a_{14}}, \\
 x_2 &= \frac{a_{21}}{a_{24}}, & y_2 &= \frac{a_{22}}{a_{24}}, & z_2 &= \frac{a_{23}}{a_{24}}, \\
 x_3 &= \frac{a_{31}}{a_{34}}, & y_3 &= \frac{a_{32}}{a_{34}}, & z_3 &= \frac{a_{33}}{a_{34}}, \\
 x_4 &= \frac{a_{41}}{a_{44}}, & y_4 &= \frac{a_{42}}{a_{44}}, & z_4 &= \frac{a_{43}}{a_{44}}.
 \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 6V &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{a_{14}a_{24}a_{34}a_{44}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$(II) \quad 6V = \frac{\Delta^3}{a_{14}a_{24}a_{34}a_{44}}.$$


---

# NOTE SUR LES CONDITIONS QUI EXPRIMENT QU'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ EST DE RÉVOLUTION;

PAR M. GENTY.

Soient

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$$

l'équation d'une surface  $S$  du second degré à centre, rapportée à ses trois plans principaux,

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$$

celle de sa polaire réciproque  $S_1$  par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

L'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha x & \beta y & \gamma z \\ \frac{x}{\alpha} & \frac{y}{\beta} & \frac{z}{\gamma} \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que les plans polaires d'un point quelconque  $(x, y, z)$  par rapport à la sphère et aux deux quadriques sont parallèles à une même droite, représente les trois plans principaux des surfaces  $S$  et  $S_1$ ; en effet, cette équation développée devient

$$(1) \quad \frac{x y z}{\alpha \beta \gamma} (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est évidemment un covariant, puisqu'il exprime une propriété géométrique des trois surfaces complètement indépendante du choix des axes. Si donc

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

sont les équations des quadriques  $S$  et  $S_1$  rapportées maintenant à trois axes rectangulaires quelconques passant par leur centre, l'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = 0$$

représentera les trois plans principaux de ces deux quadriques.

Mais si la surface  $S$  est de révolution, deux des trois quantités  $\alpha, \beta, \gamma$  qui entrent dans l'équation (1) sont égales et le premier membre de cette équation est identiquement nul.

On obtiendra donc les conditions qui expriment que la surface  $S$  est de révolution en écrivant que le premier membre de l'équation (2) est identiquement nul.

Soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$$

l'équation développée de la surface  $S$ ; celle de la surface  $S_1$  sera

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = \Delta,$$

en posant

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2,$$

$$A = bc - f^2, \quad B = ca - g^2, \quad G = ab - h^2,$$

$$F = gh - af, \quad G = hf - bg, \quad H = fg - ch,$$

et l'équation (2) prendra la forme

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ ax + hy + gz & hx + by + fz & gx + fy + cz \\ Ax + Hy + Gz & Hx + By + Fz & Gx + Fy + Cz \end{vmatrix} = 0.$$

En identifiant à zéro le premier membre de cette

équation, on obtient de suite les conditions cherchées sous la forme

$$\frac{b-c}{B-C} = \frac{c-a}{C-A} = \frac{a-b}{A-B} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = \frac{h}{H}.$$

On reconnaît sans peine que l'ensemble de ces équations ne représente que deux conditions réellement distinctes.

En remplaçant F, G et H par leurs valeurs dans les équations

$$\frac{F}{f} = \frac{G}{g} = \frac{H}{h},$$

on a

$$\frac{gh-af}{f} = \frac{hf-bg}{g} = \frac{fg-ch}{h}$$

ou bien

$$a - \frac{gh}{f} = b - \frac{hf}{g} = c - \frac{fg}{h};$$

c'est la forme habituelle des équations de condition.

### QUESTION DE LICENCE (PARIS, JUILLET 1880);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

*En un point M de la chaînette définie en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$(1) \quad y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

*on mène la tangente que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre T avec OX, puis on fait tourner la figure autour de OX.*

*Exprimer la différence des aires décrites par l'arc de chaînette AM, A étant le sommet de la courbe et*

par la tangente MT : 1° en fonction de l'abscisse de M, 2° en fonction de l'abscisse de T.

Soient  $x, y$  les coordonnées du point M. La tangente MT engendrera la surface latérale d'un cône :  $\pi y \times \text{MT}$ . Calculons d'abord MT. L'équation (1) donne

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right);$$

par suite, l'équation de la tangente au point M est

$$Y - y = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) (X - x).$$

En y faisant  $Y = 0$ , on aura l'abscisse du point T

$$(3) \quad X = x - a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} = x - \frac{2y}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}.$$

On a donc

$$\text{MT}^2 = y^2 + \frac{4y^2}{\left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2} = \frac{y^2 \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2}{\left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)^2},$$

d'où

$$\text{MT} = y \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} = \frac{2}{a} \frac{y^2}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}};$$

par suite, la surface engendrée par MT a pour expression

$$\text{surf. MT} = \frac{2\pi y^3}{a \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)}.$$

D'autre part,

$$\text{surf. AM} = 2\pi \int_0^x y \, ds,$$

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = \frac{y \, dx}{a},$$

$$\begin{aligned} \text{surf. AM} &= 2\pi \int_0^x \frac{y^2}{a} dx = \frac{\pi a}{2} \int_0^x \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx \\ &= \frac{\pi a}{2} \int_0^x \left( e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2 \right) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{surf. AM} &= \frac{\pi a}{2} \left( \frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} + 2x \right) \\ &= \frac{\pi a y}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + \pi a x. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{surf. AM} - \text{surf. MT} &= \pi a x - \frac{\pi a y}{2} \left[ \frac{4y^2}{a^2 \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)} \right] \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \\ &= \pi a \left[ x - \frac{2y}{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}} \right] = \pi a X. \end{aligned}$$

## DÉCOMPOSITION DES NOMBRES $f^{12} - 9g^{12}$ ET DU DOUBLE DE CES NOMBRES EN DEUX CUBES RATIONNELS ;

PAR M. G. HENRY.

On doit à M. Édouard Lucas ces deux identités (1)

$$(1) \quad \begin{cases} (6LM + L^2 - 3M^2)^3 \\ + (6LM - L^2 + 3M^2)^3 = 2^2 \cdot 3^2 LM (L^2 + 3M^2)^2. \end{cases}$$

$$(2) \quad (L + M)^3 + (L - M)^3 = 2L (L^2 + 3M^2),$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 91.



d'où l'on tire aisément, par des substitutions convenables, ce théorème (1) :

*Le quadruple et le carré de  $4p^6 + 27q^6$  est décomposable en deux cubes rationnels.*

De l'identité (2) on peut déduire également cette autre proposition :

**THÉORÈME.** — *Les nombres de la forme  $f^{12} - 9g^{12}$  et leur double sont décomposables en deux cubes rationnels.*

En effet, si dans l'identité (2) on remplace

$$\begin{aligned} L & \text{ par } f^6 (f^{12} - 9g^{12}), \\ M & \text{ par } 3g^6 (f^{12} - g^{12}), \end{aligned}$$

on a facilement

$$L^2 + 3M^2 = (f^{12} + 3g^{12})^3,$$

et, en posant

$$A = f^{12} - 9g^{12},$$

il vient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{A f^6 + 3 g^6 (f^{12} - g^{12})}{f^2 (f^{12} + 3 g^{12})} \right]^3 \\ & + \left[ \frac{A f^6 - 3 g^6 (f^{12} - g^{12})}{f^2 (f^{12} + 3 g^{12})} \right]^3 = A. \end{aligned} \right.$$

Si, dans la même identité (2), on fait

$$\begin{aligned} L &= 4f^3 g^3 (f^6 - 9g^6), \\ M &= f^{12} - 18f^6 g^6 + 9g^{12}, \end{aligned}$$

on a

$$(4) \quad \left[ \frac{L + M}{2fg(f^6 + 3g^6)} \right]^3 + \left[ \frac{L - M}{2fg(f^6 + 3g^6)} \right]^3 = A.$$

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 430.

Donc les nombres de la forme  $f'^2 - 9g'^2$  et leur double sont des sommes de deux cubes rationnels.

Les nombres  $f$  et  $g$  sont évidemment supposés inégaux.

### QUESTION DE LICENCE (PARIS, JUILLET 1880);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

*Un corps solide se meut autour d'un point fixe : trouver à chaque instant le lieu des points du corps pour lesquels l'accélération est perpendiculaire à l'axe instantané de rotation.*

Désignant par  $u, v, w$  les projections de la vitesse d'un point dont les coordonnées sont  $\xi, \eta, \zeta$ , on a

$$u = q\zeta - r\eta,$$

$$v = r\xi - p\zeta,$$

$$w = p\eta - q\xi.$$

En différentiant ces équations, en considérant  $\xi, \eta, \zeta$  comme constantes, on aura les projections de l'accélération suivant les axes  $O\xi, O\eta, O\zeta$  :

$$\frac{du}{dt} = \zeta \frac{dq}{dt} - \eta \frac{dr}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = \xi \frac{dr}{dt} - \zeta \frac{dp}{dt},$$

$$\frac{dw}{dt} = \eta \frac{dp}{dt} - \xi \frac{dq}{dt}.$$

L'accélération fait avec les axes mobiles des angles dont les cosinus sont proportionnels à  $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ .

D'autre part, l'axe instantané de rotation, qui a pour équations

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r},$$

et avec les mêmes axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . Ces deux directions devant être rectangulaires, on a l'équation

$$p \left( \zeta \frac{dq}{dt} - \eta \frac{dr}{dt} \right) + q \left( \xi \frac{dr}{dt} - \zeta \frac{dp}{dt} \right) + r \left( \eta \frac{dp}{dt} - \xi \frac{dq}{dt} \right) = 0,$$

1

$$\left( q \frac{dr}{dt} - r \frac{dq}{dt} \right) \xi + \left( r \frac{dp}{dt} - p \frac{dr}{dt} \right) \eta + \left( p \frac{dq}{dt} - q \frac{dp}{dt} \right) \zeta = 0,$$

1 encore

$$q^2 d \frac{r}{q} \xi + r^2 d \frac{p}{r} \eta + p^2 d \frac{q}{p} \zeta = 0.$$

Cette équation, qui représente un plan passant par l'origine, jointe à l'équation de la surface, détermine le lieu cherché.

## ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (CONCOURS DE 1881).

### *Composition mathématique (trois heures).*

*Première question.* — On donne un cône de révolution, dont la génératrice  $SA$  fait avec l'axe  $Sz$  un angle  $\beta$ , et une ellipse dont les demi-axes sont  $a$  et  $b$  :

1° Démontrer que l'ellipse peut toujours être obtenue

**THÉORÈME.** — *Par les sommets d'un triangle quelconque, on mène trois parallèles qui interceptent sur les côtés du triangle six segments : le produit de trois segments non consécutifs est toujours égal au produit des côtés du triangle.*

Les cubiques (1) sont des courbes à trois axes de symétrie. L'équation générale des cubiques à trois axes de symétrie est, en prenant un triangle de référence dont les côtés soient perpendiculaires aux axes de symétrie,

$$(2) \begin{cases} m(x + y + z)^3 \\ + n(x + y + z)(xy + yz + zx) + pxyz = 0. \end{cases}$$

On peut toujours disposer du triangle de référence de manière à faire disparaître un des termes de cette équation. Si l'on fait disparaître le premier, on retombe sur l'équation (1). Donc les cubiques (1) comprennent toutes les cubiques à trois axes de symétrie. Si l'on fait disparaître le second terme, l'équation (2) devient

$$(3) \quad xyz = k(x + y + z)^3.$$

Donc :

**THÉORÈME.** — *Les cubiques à trois axes de symétrie sont telles que le produit des distances d'un de leurs points aux trois côtés d'un triangle équilatéral est constant.*

Remarquons, en terminant, que l'équation (3) ne contient pas de cubique décomposable : elle ne se déduit de l'équation (2) que si  $p$  n'est pas nul, et de l'équation (1) que si  $k$  n'est pas égal à  $-1$ .

LUCIEN LÉVY,  
Professeur au lycée Louis-le-Grand.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### Question 1335

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 479);

PAR M. MARCELLO ROCCHETTI.

*démontrer :*

1<sup>o</sup> *Que les solutions entières et positives de l'équation  $24x^2 + 1 = y^2$ , dont les deux premières sont  $x = 0$  et  $y = 1$ ;  $x = 1$  et  $y = 5$ , se déduisent chacune des deux précédentes en retranchant l'avant-dernière valeur de  $x$  de  $y$  de dix fois la dernière pour obtenir la suivante;*

2<sup>o</sup> *Que les solutions entières et positives de l'équation  $2x^2 + 1 = 3y^2$ , dont les deux premières sont  $x = 1$  et  $y = 1$ ;  $x = 11$  et  $y = 9$ , s'obtiennent comme celles de l'équation précédente (1<sup>o</sup>);*

3<sup>o</sup> *Que toute valeur du nombre  $X = 3x^2 + 2$  (2<sup>o</sup>) ait la double propriété d'être égale à la somme des carrés de trois entiers consécutifs et à celle des carrés de deux entiers consécutifs est de la forme  $360n + 5$ .*

(LIONNET.)

4<sup>o</sup> *Si  $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$  sont les  $n$  premières solutions de l'équation  $24x^2 + 1 = y^2$ , déduites chacune des deux précédentes de la manière indiquée, la proposition sera vraie, en général, si l'on démontre que*

$$24\alpha_{n+1}^2 + 1 = \beta_{n+1}^2,$$

$$\alpha_{n+1} = 10\alpha_n - \alpha_{n-1} \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} = 10\beta_n - \beta_{n-1}.$$

Substituons les valeurs (2) dans l'équation (1); celle-ci est vérifiée si

$$24x_n x_{n-1} = \beta_n \beta_{n-1} - 5,$$

relation qui devient

$$24x_2 x_1 = \beta_2 \beta_1 - 5.$$

Mais cette dernière équation est satisfaite en faisant

$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 5;$   
donc, etc.

2° On doit démontrer semblablement que

$$2x_n x_{n-1} = 3\beta_n \beta_{n-1} - 5,$$

relation qui devient

$$2x_2 x_1 = 3\beta_2 \beta_1 - 5.$$

Mais cette équation est satisfaite en faisant

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 11, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 9;$   
donc, etc.

*Remarque.* — Pour les valeurs de

$$x = 1, 11, 109, 1079, \dots,$$

$x^2$  est de la forme  $120n + 1$ , et, par conséquent,  $3x^2 + 2$  est de la forme  $360n + 5$ .

3° L'équation

$$2z^2 + 2z + 1 = 3x^2 + 1$$

donne

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{6x^2 + 3}}{2}.$$

On aura pour  $z$  des valeurs entières et positives quand  $+\sqrt{6x^2 + 3}$  sera un nombre entier nécessairement divisible par 3. Donc toute valeur de  $x$  entière et positive

qui vérifie la relation  $2x^2 + 1 = 3y^2$ , où  $y$  est un nombre entier, donne une valeur de  $z$  entière et positive.

Mais les solutions indiquées ont été déterminées ( $2^\circ$ ); elles sont

Pour  $x$ ..... 1, 11, 109, 1079, ....,

Pour  $y$ ..... 1, 9, 89, 881, ...;

donc nous avons

Pour  $z = \frac{3y-1}{2}$ ..... 1, 13, 133, 1321, ....

*Exemple :*

Pour  $x=1$ .....  $N=0+1^2+2^2=1^2+2^2$ ,

Pour  $x=11$ .....  $N=10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$ ,

Pour  $x=109$ ....  $N=108^2+109^2+110^2=133^2+134^2$ ,

.....

*Note.* — La même question a été résolue par MM. F. Pisani; J. Lissençon; Moret-Blanc; A. Leinekugel.

### Question 1345

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 432);

PAR M. N. GOFFART.

*Démontrer que toute droite passant par le sommet commun aux trois coniques représentées par les équations*

$$y^2 - 2px = 0,$$

$$2px^2 + \alpha(y^2 - 2px) = 0,$$

$$2px^2 - \alpha(y^2 - 2px) = 0$$

*les coupe en trois autres points qui forment avec le sommet une proportion harmonique, quelle que soit la valeur de  $\alpha$ .*

(ÉD. GUILLET.)

Soit une droite quelconque  $y = mx$ , passant au sommet. Elle coupe respectivement les trois coniques aux points  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , et l'on a, par conséquent,

$$\frac{1}{x_1} = \frac{m^2}{2p},$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{m^2}{p},$$

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-\alpha} + \frac{m^2}{p}.$$

Donc

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{x_1},$$

relation indépendante de  $\alpha$  et qui démontre la proposition.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. H. Lez; Moret-Blanc; F. Pisani; J. Boudènes et J. Perret, élèves du lycée de Grenoble; A. Droz, au Gymnase cantonal de Porrentruy (Berne); E. Pecquery, élève du lycée du Havre; H. Herzog, du lycée de Rouen.

### Question 1347

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 432);

PAR M. N. GOFFART.

*Six points quelconques étant donnés sur un plan, le lieu géométrique des points tels qu'en les joignant aux six points donnés on obtienne un faisceau en involution se compose de quinze cubiques du troisième ordre qui passent toutes par les six points donnés. (DEWULF.)*

Soient

A et A', B et B', C et C'

les points donnés, et leurs coordonnées respectives

$x_1, y_1$  et  $x'_1, y'_1$ ,  $x_2, y_2$  et  $x'_2, y'_2$ ,  $x_3, y_3$  et  $x'_3, y'_3$ .



Soit  $M(x, y)$  le point mobile; prenons pour axe des  $x$  une droite  $OX$  quelconque, coupant les droites  $MA$ ,  $MA'$ ,  $MB$ , ..., aux points

$$a \text{ et } a', \quad b \text{ et } b', \quad c \text{ et } c',$$

dont les distances respectives à l'origine sont

$$\alpha \text{ et } \alpha', \quad \beta \text{ et } \beta', \quad \gamma \text{ et } \gamma'.$$

Nous exprimerons que le faisceau est en involution en écrivant l'équation symétrique

$$ab' \cdot bc' \cdot ca' + a' b \cdot b' c \cdot c' a = 0$$

ou

$$(\alpha - \beta')(\beta - \gamma')(\gamma - \alpha') + (\alpha' - \beta)(\beta' - \gamma)(\gamma' - \alpha) = 0.$$

Exprimons en fonction des coordonnées toutes ces différences. Remarquons que la droite  $MA$   $a$ , par exemple, a pour équation

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_1 - \alpha}{y_1},$$

d'où

$$\alpha = \frac{x_1 y - x y_1}{y - y_1}.$$

Par analogie, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x_1 y - x y_1}{y - y_1}, & \alpha' &= \frac{x'_1 y - x y'_1}{y - y'_1}, \\ \beta &= \frac{x_2 y - x y_2}{y - y_2}, & \beta' &= \frac{x'_2 y - x y'_2}{y - y'_2}, \\ \gamma &= \frac{x_3 y - x y_3}{y - y_3}, & \gamma' &= \frac{x'_3 y - x y'_3}{y - y'_3}. \end{aligned}$$

Formons maintenant les différences qui composent le produit; nous aurons, par exemple,

$$\alpha - \beta' = \frac{y[(x_1 y - x y_1) - (x'_2 y - x y'_2) + (x'_2 y_1 - x_1 y'_2)]}{(y - y_1)(y - y'_2)}$$

ou encore

$$\alpha - \beta' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{(y - y_1)(y - y_2)}.$$

On formerait de même les autres différences, et l'on aurait, après substitution et réduction,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} =$$

L'équation de cette courbe est, comme on le voit, troisième degré, et l'on remarque que, si l'on substitue  $x$  et  $y$  les coordonnées de l'un des points donnés,  $x_1$ , par exemple, un déterminant facteur s'annule dans chaque produit, ce qui revient à dire que la courbe passe par les six points donnés.

L'ordre des lettres  $a, a', b, \dots$  étant posé comme tout à l'heure, on peut admettre que les droites  $MA, MA', \dots$  soient prises dans un ordre différent pour produire la suite  $a, a', b, \dots$ . Dès lors, on produira autant de courbes analogues à la précédente qu'on pourra former de faisceaux, tels que  $M(ABCC')$ , produisant l'involution  $(aa'bb'cc')$ , c'est-à-dire autant de courbes que de combinaisons de six objets quatre à quatre, soit  $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$ .

*Note.* — La même question a été résolue par MM. F. Dumont, chargé de cours au lycée de Tournon, et Moret-Blanc.

## Question 1349

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XIX, p. 480);

PAR M. MORET-BLANC.

*trouver un nombre positif ayant la double propriété d'être égal au produit de trois entiers consécutifs et à celui de deux entiers consécutifs.* (LIONNET.)

Il faut résoudre en nombres entiers et positifs l'équation indéterminée

$$\begin{cases} y(y+1)(y+2) = x(x+1), \\ \text{ou} \\ y^3 + 3y^2 + 2y = x^2 + x. \end{cases}$$

multipliant les deux membres par 4, et ajoutant 1,

$$4y^3 + 12y^2 + 8y + 1 = (2x + 1)^2.$$

la question se réduit donc à trouver un nombre  $y$ , tel que  $4y^3 + 12y^2 + 8y + 1$  soit un carré parfait. Posons

$$4y^3 + 12y^2 + 8y + 1 = (my - 1)^2,$$

$$4y^2 + (12 - m^2)y + (2m + 8) = 0;$$

$$y = \frac{m^2 - 12 \pm \sqrt{m^4 - 24m^2 - 32m + 16}}{8}.$$

Pour que  $m^4 - 24m^2 - 32m + 16$  soit le carré d'un multiple de 4; on peut donc poser  $m = 2n$ , et, en divisant par 16 l'expression qui doit être un carré, on a

$$n^4 - 6n^2 - 4n + 1,$$

qui doit être un carré.

Il voit immédiatement que cette condition est satis-

faite par  $n = 3$ , d'où  $m = 6$  et  $y = \frac{24 \pm 16}{8}$ , ce qui donne les deux solutions  $y = 1$  et  $y = 5$ , ou

$$\begin{aligned} 1.2.3 &= 2.3 = 6, \\ 5.6.7 &= 14.15 = 210. \end{aligned}$$

Les nombres 6 et 210 jouissent donc de la propriété énoncée (1).

(1) *Note du Rédacteur.* — D'après les équations (2) et (3) on a

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= my - 1, \\ x + 1 &= \frac{m}{2}y; \end{aligned}$$

donc, si  $m$  est effectivement un nombre pair  $2n$ ,  $x + 1 = ny$ , c'est-à-dire que  $x + 1$  est multiple de  $y$ . En admettant *a priori* cette hypothèse, un calcul très simple fait connaître les solutions de la question proposée.

En remplaçant  $x + 1$  par  $ny$ , l'équation (1) devient

$$y^2 - (n^2 - 3)y + n + 2 = 0.$$

Le nombre entier  $n$  ne peut être moindre que 3, car, pour  $n = 1$  et  $n = 2$ , les racines de l'équation précédente sont imaginaires.

Le nombre  $n$  ne peut surpasser 3. En effet, si l'on remplace successivement  $y$  par  $n^2 - 3$  et  $n^2 - 4$ , le premier membre de l'équation

$$y^2 - (n^2 - 3)y + n + 2 = 0$$

prend les valeurs

$$n + 2 \quad \text{et} \quad -n^2 + n + 6 = (3 - n)(n + 2);$$

la première est évidemment positive, et l'autre est négative quand  $n$  dépasse 3. Dans ce cas, l'équation a une racine comprise entre les deux entiers consécutifs  $n - 4$ ,  $n - 3$ ; l'autre racine est comprise entre 0 et 1, comme il est facile de le voir, en ayant égard à ce que la somme des deux racines est  $n^2 - 3$ . Par conséquent, aucune des deux racines n'est égale à un nombre entier.

Il faut donc que  $n = 3$ ; il en résulte

$$y^2 - 6y + 5 = 0, \quad y = 1 \quad \text{et} \quad y = 5,$$

d'où

$$x = 2 \quad \text{et} \quad x = 14.$$

Ce sont les deux solutions trouvées par M. Moret-Blanc.

(G.)

# **SUR UN THÉORÈME DE PAPPUS;**

PAR M. H. RESAL.

oncé de ce théorème, qui est peu ou point connu,  
aduit de la manière suivante :

*À partir du sommet d'un hémisphère on décrit une spirale  
à partir d'un point partant de ce sommet et marchant uni-  
quement sur le quart de cercle qu'il parcourra pen-  
sant que le quart de cercle fera une révolution entière  
de l'hémisphère, la portion de la surface spheri-  
cale comprise entre cette spirale et la base sera égale  
à l'aire du diamètre.*

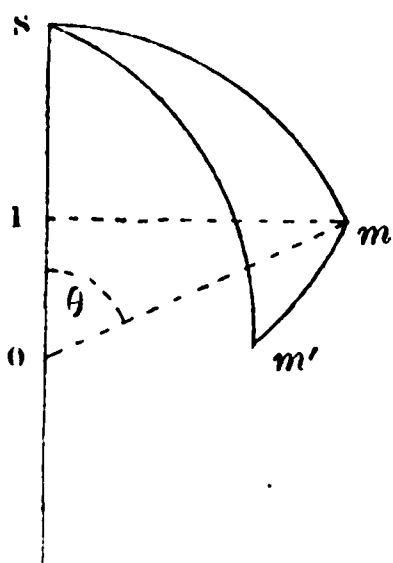
et

rayon de l'hémisphère;

sommet;

centre;

position quelconque du mobile;



position qui en est infiniment voisine;

projection de  $m$  sur  $OS$ ;

de  $mOS$ ;

de dont le quart de cercle a tourné.

Comme on a  $\varphi = 2\pi$  pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , on voit que

$$\theta = \frac{\varphi}{4}.$$

On reconnaît facilement que

$$SI = R \left( 1 - \cos \frac{\varphi}{4} \right),$$

$$\text{aire } Smm' = 2\pi R \cdot SI \times \frac{d\varphi}{2\pi} = R^2 \left( 1 - \cos \frac{\varphi}{4} \right) d\varphi.$$

En intégrant cette expression entre les limites 0 et  $2\pi$ , on trouve pour l'aire comprise entre le sommet S et la spirale

$$R^2(2\pi - 4).$$

Par conséquent, l'aire comprise entre la courbe et la base est  $4R^2$ , ce qui est conforme à l'énoncé.

## SUR UNE CLASSE DE SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. V. JAMET,

Professeur au lycée de Nice (¹).

VII. Voyons maintenant comment se transforment, dans un cône du second ordre, les lignes et les plans qui jouent un certain rôle dans l'étude de cette surface, par exemple les focales et les plans cycliques.

Toute droite passant par le sommet du cône transformé se transforme en une circonférence passant par les deux points singuliers de la girocyclide. En particulier, comme les focales du cône font avec chacune de

(¹) Voir même Tome, p. 385.

ses génératrices des angles dont la somme est constante, elles se transforment en deux circonférences, faisant avec chacune des circonférences génératrices de la girocyclide deux angles dont la somme est constante : ce qui revient à dire que chacune des génératrices du cône tangent fait avec les tangentes à ces deux circonférences deux angles dont la somme est constante. Ainsi, aux génératrices du cône transformé correspondent deux circonférences passant par les points singuliers de la surface, et dont les tangentes en ces points sont les focales des cônes tangents. Nous les appellerons les *circonférences focales de la girocyclide*.

Les plans cycliques du cône transformé, c'est-à-dire les plans menés par le sommet de ce cône parallèlement aux plans de ses sections circulaires, se transforment en des sphères passant par les deux points singuliers de la surface. Le centre d'une de ces sphères se trouve sur la perpendiculaire abaissée de l'un des points singuliers sur le plan cyclique correspondant du cône transformé. Nous en concluons que les plans tangents à ces sphères aux points singuliers sont les plans cycliques des cônes tangents. Nous appellerons ces sphères les *sphères cycliques de la surface*.

VIII. Chasles, dans un important Mémoire sur les cônes du second ordre, a démontré les deux théorèmes suivants, corrélatifs l'un de l'autre :

1° *Tout plan passant par le sommet d'un cône du second ordre coupe le cône et les deux plans cycliques suivant quatre droites, telles que les deux premières sont également inclinées sur les deux autres.*

2° *Si l'on mène deux plans tangents à un cône du second ordre, et que par leur intersection et les deux*

*focales on fasse passer deux plans, ces deux plans sont également inclinés sur les deux plans tangents.*

Nous en déduirons les deux théorèmes suivants :

1° *Toute sphère passant par les deux points singuliers d'une girocyclide du quatrième ordre coupe cette girocyclide et les deux sphères cycliques suivant quatre circonférences, telles que les deux premières font des angles égaux avec les deux autres.*

2° *Si, dans une girocyclide du quatrième ordre, on considère deux sphères enveloppées, et que par leur intersection et les deux circonférences focales on fasse passer des sphères, ces deux sphères coupent les deux sphères enveloppées sous des angles égaux.*

IX. Proposons-nous de chercher ce qui caractérise les girocyclides qui correspondent à des cônes de révolution. Comme tous les cônes transformés d'une girocyclide sont égaux au cône tangent en un des points singuliers, et que d'ailleurs les cônes tangents aux deux points singuliers sont symétriques par rapport à un plan, il s'ensuit que, pour que la girocyclide corresponde à un cône de révolution, il faut et il suffit que le cône tangent en un des points singuliers soit de révolution. S'il s'agit, par exemple, de la girocyclide représentée par l'équation

$$[x^2 + y^2 + (z - c)^2 + 2ax + 2by + 2c(z - c)]^2 = 4Ax^2 + 4By^2,$$

on sait que le cône tangent au point  $(0, 0, c)$  a pour équation

$$[ax + by + c(z - c)]^2 = Ax^2 + By^2,$$

ou, en ordonnant,

$$(a^2 - A)x^2 + (b^2 - B)y^2 + c^2(z - c)^2 + 2bcy(z - c) + 2acx(z - c) + 2abxy = 0.$$



Si l'on suppose que  $a$  et  $b$  soient différents de 0, c'est-à-dire que la ligne qui joint les deux points singuliers ne soit pas dans l'un des plans menés par les axes de la conique, lieu des centres des sphères enveloppées, perpendiculairement au plan de cette conique, on trouve que, pour que le cône tangent soit de révolution, il faut que l'on ait

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0.$$

Mais, dans ce cas, la girocyclide se réduit à une sphère.

Si, au contraire, on suppose  $a = 0$ , les coefficients de deux des rectangles, dans l'équation du cône, sont nuls, et la condition pour qu'il soit de révolution est

$$(c^2 + A)(b^2 - B + A) = b^2 c^2,$$

ou bien

$$A b^2 + (A - B)c^2 + A(A - B) = 0,$$

ou encore

$$\frac{b^2}{A - B} + \frac{c^2}{A} + 1 = 0.$$

Ainsi, les points singuliers doivent être sur l'une des coniques, lieu des sommets des cônes de révolution qui ont pour base le lieu des centres des sphères enveloppées : on obtient ainsi les surfaces que M. Amigues appelle des *digirocyclides*.

Dans le Mémoire que j'ai cité plus haut, Chasles a encore démontré les deux théorèmes corrélatifs suivants :

1° *Deux plans tangents à un cône coupent les deux plans cycliques menés par un même axe de symétrie suivant quatre droites qui sont situées sur un même cône de révolution.*

2° *Les quatre plans menés par les deux focales d'un*

*cône du second ordre et deux génératrices de ce cône sont tangents à un même cône de révolution.*

Il en résulte les deux propositions suivantes :

1° *Deux des sphères enveloppées d'une girocyclide du quatrième ordre coupent les deux sphères cycliques suivant quatre circonférences qui sont des lignes de courbure d'une même digirocyclide.*

2° *Les quatre sphères menées par les deux circonférences focales d'une girocyclide du quatrième ordre et deux de ses lignes de courbure circulaires sont inscrites dans une même digirocyclide.*

X. Si l'on considère le cercle transformé d'une droite quelconque de l'espace, et qu'on joigne le centre de transformation à quatre points A, B, C, D pris sur cette droite, les quatre rayons vecteurs déterminent sur la circonférence quatre points dont le rapport anharmonique est égal au rapport (ABCD). Cela permet de déduire des propriétés des pôles et des plans polaires dans les cônes du second ordre les propositions suivantes :

1° Si par un point P de l'espace et par un des points singuliers d'une girocyclide du quatrième ordre on fait passer une circonférence quelconque, elle coupe la girocyclide en deux points, tels que le conjugué harmonique du point P par rapport à ces deux points se meut sur une sphère qui passe par les deux points singuliers.

Nous appellerons cette sphère la *sphère polaire du point P*.

2° Si un point se meut sur une circonférence passant par les deux points singuliers, sa sphère polaire est fixe. Nous l'appellerons la *sphère conjuguée de la circonférence*.

3° Si l'on considère une circonférence passant par les

deux points singuliers, il existe, sur la sphère conjuguée, une infinité de systèmes de deux circonférences qui passent aussi par les deux points singuliers et forment avec la première un système de trois circonférences conjuguées, c'est-à-dire telles que la sphère qui passe par deux quelconques d'entre elles est la sphère conjuguée de la troisième.

4° Dans toute girocyclide du quatrième ordre, il existe trois circonférences conjuguées rectangulaires. Nous les appellerons les *circonférences principales*. Les sphères passant par deux quelconques d'entre elles seront les sphères principales. Une sphère principale contient deux circonférences focales; toute sphère cyclique passe par une circonférence principale.

XI. Nous appellerons *girocyclides homofocales* deux girocyclides ayant même système de circonférences focales. Elles ont en même temps un même système de circonférences principales, et chacune de celles-ci fait des angles égaux avec deux des circonférences focales.

Des propriétés des cônes homofocaux nous déduirons les propriétés suivantes :

Par un point de l'espace on peut faire passer deux girocyclides du quatrième ordre, ayant pour focales deux circonférences données sur une même sphère; ces girocyclides se coupent à angle droit.

Si l'on imagine une circonférence C passant par le point donné et par les deux points communs aux deux focales, ces deux girocyclides couperont à angle droit les deux sphères qui passent elles-mêmes par les points communs aux deux focales et font des angles égaux avec les deux sphères menées par chacune des deux focales et la circonférence C.

Il faut encore remarquer que tous les cônes qui tou-

chent une série de girocyclides homofocales en un de leurs points singuliers communs sont eux-mêmes homofocaux.

XII. Dans toute girocyclide du quatrième ordre, les lignes de courbure de la seconde série ont pour transformées des coniques sphériques. Comme, dans l'étude de ces courbes, les grands cercles des sphères sur lesquelles elles sont tracées jouent un rôle important, je vais chercher à caractériser les courbes transformées de ces grands cercles.

Si, comme nous l'avons fait précédemment, nous prenons pour axe des  $z$  la ligne qui joint les deux points singuliers de la girocyclide et pour origine le milieu de leur distance, l'équation qui représentera l'une quelconque des sphères sur lesquelles se trouvent les lignes de courbure de seconde espèce sera, d'après un théorème démontré par M. Amigues,

$$(7) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda z + c^2 = 0,$$

$c$  désignant, comme précédemment, la demi-distance des deux points singuliers.

La sphère correspondant au plan d'un des grands cercles de la sphère transformée aura pour équation

$$(8) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - c^2 = 0.$$

Le plan radical de ces deux sphères a pour équation

$$hx + ky - \lambda z + c^2 = 0.$$

Ce plan passe par le point dont les coordonnées sont  $x = 0, y = 0, z = \frac{c^2}{\lambda}$ ; pour une valeur donnée de  $\lambda$ , ce point est fixe et réel : c'est le conjugué harmonique du centre de la sphère (7) par rapport aux points singuliers de la girocyclide. Ainsi, les plans des circonférences qui

correspondent aux grands cercles d'une sphère ayant pour centre le sommet du cône transformé passent par un point fixe.

Ce point jouit d'une propriété remarquable : c'est le sommet d'un cône du second ordre ayant pour directrice la ligne de courbure déterminée par la sphère (7). En effet, soit l'équation de la girocyclide

$$(9) \quad (x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by - c^2)^2 = 4Ax^2 + 4By^2;$$

si, dans cette équation, on remplace  $x^2 + y^2 + z^2$  par sa valeur tirée de l'équation (7), il vient

$$(10) \quad (ax + by + \lambda z - c^2)^2 = Ax^2 + By^2,$$

de sorte que par l'intersection des surfaces (7) et (9) on peut faire passer le cône représenté par l'équation (10); son sommet est bien au point précédemment défini, et sa base est l'intersection du cône tangent en un quelconque des points singuliers avec le plan des  $xy$ . En outre, si l'on considère le cône tangent au point  $(0, 0, c)$ , par exemple, on voit facilement que la seconde courbe plane suivant laquelle ce cône coupe le cône représenté par l'équation (10) est située dans le plan représenté par l'équation

$$2ax + 2by + (c + \lambda)z - 2c^2 = 0.$$

Ce plan passe par une droite fixe située dans le plan des  $xy$  et dont l'équation est

$$ax + by - c^2 = 0;$$

c'est la corde des contacts des droites menées par l'origine, parallèlement aux asymptotes de la conique lieu des centres des sphères enveloppées, avec la conique

$$(ax + by - c^2)^2 = Ax^2 + By^2,$$

qui est la base commune au cône tangent et au cône (10).



Si d'un point P, pris sur le cycle directeur d'une ligne de courbure de seconde espèce, on lui mène des cycles tangents, le cycle qui joint les points de contact passe par les foyers et est perpendiculaire à celui qui joint ce foyer au point P.

XIV. Enfin, ce qui précède permet d'écrire, dans le cas où la surface qu'on étudie est une digirocyclide, l'équation qui représente les plans des deux lignes de courbure circulaires suivant lesquelles la sphère (7) coupe la surface.

En effet, dans ce cas, l'équation (10) s'écrit

$$(by + \lambda z - c^2)^2 = Ax^2 + By^2.$$

Par l'intersection de cette surface avec la sphère (7), on peut faire passer la surface représentée par l'équation suivante :

$$(11) \quad \begin{cases} (by + \lambda z - c^2)^2 \\ + (A - B)y^2 + Az^2 - 2A\lambda z + Ac^2 = 0, \end{cases}$$

et l'on reconnaît aisément : 1° que le discriminant de cette équation devient nul quand on tient compte de la relation

$$b^2c^2 = (c^2 + A)(b^2 - B + A);$$

2° que, dans ce cas, les deux plans représentés par l'équation (11) coupent le plan des  $xy$  suivant une même droite, dont la position ne dépend pas de  $\lambda$ .

Comme la sphère (7) coupe le plan des  $xy$  suivant le cercle fixe (réel ou imaginaire)  $x^2 + y^2 + c^2 = 0$ , on en conclut que les lignes de courbure de la seconde série sont circulaires et passent par deux points fixes. Cela concorde avec les résultats trouvés par M. Amigues.

---



---

**SUR LE NOMBRE DES POINTS MULTIPLES D'UNE COURBE  
ALGÈBRIQUE ET LES COURBES UNICURSALES ;**

PAR M. E. PELLET.

---

1. Soient  $m$  le degré d'une courbe algébrique  $(A)$ , non décomposable en courbes de degré inférieur,  $p_i$  le nombre de ses points multiples d'ordre  $i$ ;  $p_i = 0$  si  $i$  est supérieur à  $m - 1$ .  $K$  étant le nombre des points multiples, on a

$$K = \sum_{i=2}^{i=m-1} p_i.$$

Posons en outre

$$M = \sum_{i=2}^{i=m-1} i p_i.$$

Soit  $n$  un nombre entier tel que  $\frac{n(n+3)}{2} \geq K$ ; les  $K$  points multiples et  $\frac{n(n+3)}{2} - K$  autres points pris sur la courbe définissent une courbe de degré  $n$ , qui a avec  $(A)$

$$\frac{n(n+3)}{2} - K + M$$

points communs; comme  $(A)$  est indécomposable, on a

$$mn \geq \frac{n(n+3)}{2} + M - K,$$

d'où

$$\frac{n(3m-1-n-3)}{3} \geq M - K.$$



2. *Maxima des nombres M, K et  $p_i$ .* — L'expression

$$\frac{n(2m - n - 3)}{2}$$

acquiert sa valeur maximum pour

$$n = \frac{2m - 3}{2},$$

et cette valeur maximum est

$$\frac{(2m - 3)^2}{8} = \frac{4(m - 1)(m - 2) + 1}{8}.$$

$M - K$  étant entier, son maximum est  $\frac{(m - 1)(m - 2)}{2}$ ;  
comme  $M$  est au moins égal à  $2K$ , on voit que

$$\frac{(m - 1)(m - 2)}{2} \geq K.$$

On a

$$\frac{n(2m - n - 3)}{2} + K \geq M.$$

Remplaçant chacun des termes du premier membre par sa valeur maximum, il vient

$$(m - 1)(m - 2) \geq M.$$

Pour avoir le maximum de  $p_i$ , observons que

$$M - K = \sum_{i=2}^{i=m-1} (i-1)p_i.$$

Donc

$$\frac{n(2m - n - 3)}{2} \geq (i-1)p_i.$$

Dans le premier membre,  $n$  est un nombre entier tel que

ou

$$\frac{n(n-3)}{2} \geq \frac{n(2m-n-3)}{2(i-1)},$$

d'où l'on tire

$$n \geq \frac{2m-3i}{i}.$$

Ainsi, il faudra remplacer  $n$  par le plus petit nombre entier supérieur à  $\frac{2m-3i}{i}$ .

Soit  $i = 2$ ;  $\frac{2m}{i} - 3$  est alors égal à  $m-3$ ; il faut donner à  $n$  la valeur  $m-2$ , ce qui donne pour maximum du nombre des points doubles  $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ .

Si  $i$  était supérieur à  $\frac{m}{2}$ ,  $p_i$  serait au plus égal à 1.

3. Nous allons en outre établir une relation entre  $M$  et  $K$ , qui nous sera utile. Soit  $n$  un nombre tel que  $\frac{n(n+3)}{2} < K$ ; posons, pour abréger,  $\frac{n(n+3)}{2} = \mu$ . Par  $\mu$  des points multiples on peut faire passer une courbe de degré  $n$ ; si l'on désigne par  $i, i_1, \dots, i_{\mu-1}$  les degrés de multiplicité de ces points, on a

$$mn \geq i + i_1 + \dots + i_{\mu-1},$$

et le nombre des inégalités qu'on obtient ainsi est égal au nombre de combinaisons de  $K$  objets  $\mu$  à  $\mu$ , c'est-à-dire

$$\frac{K(K-1)\dots(K-\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \mu}.$$

La somme des seconds membres de ces inégalités contient le même nombre de fois chacun des nombres  $i, i_1, \dots, i_{\mu-1}$ , et ce nombre est égal à celui des combi-

naisons complètes de  $k - 1$  objets pris  $\mu - 1$  à  $\mu - 1$ , soit

$$\frac{(K-1) \dots (K-\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots (\mu-1)}.$$

Ainsi

$$\frac{K(K-1) \dots (K-\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots \mu} mn \geq \frac{(K-1) \dots (K-\mu+1)}{1 \cdot 2 \dots (\mu-1)} M,$$

ou, en simplifiant et remplaçant  $\mu$  par  $\frac{n(n+3)}{2}$ ,

$$\frac{2mK}{n+3} \geq M.$$

Dans cette inégalité,  $n$  est un nombre tel que  $\frac{n(n+3)}{2} < K$ , et l'on constate aisément qu'elle a encore lieu si  $\frac{n(n+3)}{2} = K$ .

4. Supposons actuellement que  $n$  soit un nombre entier tel que  $\frac{n(n+3)}{2} > K$ ; les  $K$  points multiples de la courbe (A) et  $\frac{n(n+3)}{2} - K - 1$  autres points pris sur cette courbe déterminent un faisceau de courbes de degré  $n$ , dont l'équation générale contient un paramètre variable au premier degré, et qui ont chacune avec (A)

$$\frac{n(n+3)}{2} - K + M - 1$$

points communs, savoir les  $K$  points multiples qui comptent pour  $M$  et les  $\frac{n(n+3)}{2} - K - 1$  points simples choisis sur la courbe. Chaque courbe du faisceau

rencontre donc (K) en

$$mn - \frac{n(n+3)}{2} + K - M + 1 \\ = \frac{n(2m - n - 3)}{2} + K - M + 1$$

points seulement, variables avec le paramètre qui définit la courbe. Si ce nombre se réduit à l'unité, les points de la courbe (A) se déterminent individuellement, et elle appartient au genre de courbes appelées *unicursales* par M. Cayley. Ainsi,  $n$  étant le plus petit nombre tel que  $\frac{n(n+3)}{2} > K$ , la courbe (A) est unicursale si l'on a

$$(1) \quad \frac{n(2m - n - 3)}{2} + K - M = 0.$$

Ce caractère est plus simple que celui donné par M. Chasles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXII, p. 1354). Lorsqu'on aura reconnu qu'une courbe satisfait à la condition exprimée par l'équation (1), on pourra exprimer les coordonnées d'un de ses points en fonction rationnelle d'une variable par la méthode exposée par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, p. 252.

5. On reconnaît aisément que les courbes d'ordre  $m$  qui ont un point multiple d'ordre  $m-1$  satisfont à l'équation (1). Il en est de même de celles qui ont  $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$  points doubles. Il faut alors prendre  $n$  égal à  $m-2$ ;  $M = (m-1)(m-2)$ , et l'équation (1) est satisfaite. Mais on peut chercher, pour une valeur donnée de  $K$ , quelles sont les courbes satisfaisant à l'équation (1). On ne peut en trouver si

$$K = \frac{n_1(n_1+3)}{2},$$

$n_1$  étant entier. En effet, il faut faire  $n = n_1 + 1$ , et l'équation (1) devient

$$\frac{(n_1 + 1)(2m - n_1 - 1)}{2} + \frac{n_1(n_1 + 3)}{2} - M = 0$$

ou

$$mn_1 + m - 2 - n_1 - M = 0.$$

Or, d'après le n° 3,  $M \leq mn_1$  et  $n_1$  est inférieur à  $m - 2$ .

Les plus petites valeurs qu'on peut donner à  $K$  après 1 sont donc 3 et 4. Alors il faut prendre  $n = 2$ , et l'équation (1) devient

$$2m - 2 - M = 0,$$

dans le cas où  $K = 3$ . Comme  $M$  est au plus égal à  $\frac{6m}{4}$  d'après le n° 3, il sera impossible de satisfaire à cette équation si

$$2m - 2 > \frac{6m}{4} \quad \text{ou} \quad m > 4.$$

Pour  $K = 4$ , l'équation (1) devient

$$2m - 1 - M = 0,$$

On reconnaît qu'elle est satisfaite si  $m = 2\mu + 1$ , en supposant que la courbe ait trois points multiples de degré  $\mu$  et un point multiple de degré  $\mu + 1$ ; et si  $m = 2\mu$ , en supposant qu'elle ait trois points multiples de degré  $\mu$ , et de degré  $\mu - 1$ .

Soient  $a, b, c, d$  les quatre points multiples :  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$  les équations des courbes  $ab, bc, cd, da$ . Posons, pour abréger,

$$S = \alpha\gamma, \quad S_1 = \beta\delta.$$

l'équation

$$AS^\mu + BS_1S^{\mu-1} \dots + KS_1^{\mu-1}S + LS_1^\mu = 0,$$









en fonction de  $\theta$  et de la racine carrée d'un polynôme entier en  $\theta$ .

Une courbe du second genre coupe la conique

$$s - \theta s_1 = 0$$

en deux points également variables avec  $\theta$ . Ces points sont situés sur la conique

$$A\theta^{\mu-1} + B\theta^{\mu-2} + \dots + K\theta + L = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$M\alpha^2 + N\alpha\varepsilon + P\varepsilon\delta + Q\delta\alpha = 0,$$

$L, N, P, Q$  étant des polynômes du degré  $\mu - 1$  en  $\theta$ .

Or  $s - \theta s_1$  peut se mettre sous la forme (n° 6)

$$\mathfrak{A}\varepsilon\delta + \mathfrak{B}'\delta\alpha + \mathfrak{C}'\alpha\varepsilon = 0.$$

Les deux coniques représentées par les équations précédentes se coupent évidemment en deux points variables avec  $\theta$ , qui sont situés sur la droite

$$M\mathfrak{A}'\alpha + (N\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}'P)\varepsilon + (Q\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}'P)\delta = 0.$$


---

## OLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. CATALAN;

PAR M. P. BARBARIN,

Professeur au lycée de Nice.

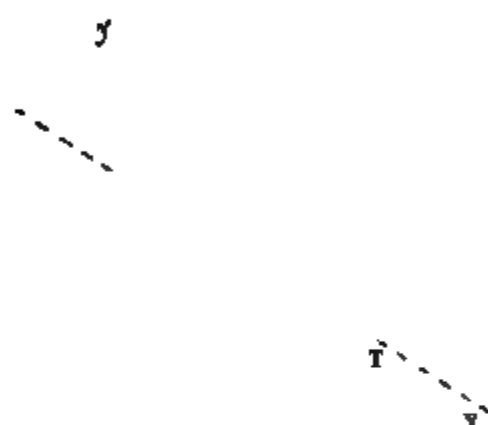
---

*Une cycloïde reste constamment tangente à deux droites fixes  $Ox, Oy$  : trouver le lieu du centre du cercle qui passe par le point  $O$  et les deux points de contact  $M, N$ .*

Soit, dans une de ses positions,  $EF$  la base de la cycloïde et soient  $M, N$  les deux points de contact. Considé-

rons les deux positions du cercle générateur qui donnent ces points M, N.

H



Les deux cercles ainsi tracés touchent la droite EF en C, D et coupent Ox, Oy en A, B.

La droite AB est égale et parallèle à CD.

L'angle  $\widehat{CAx}$  a pour mesure

$$\text{arc} \frac{MC}{2} = \frac{CE}{2}$$

dans le cercle générateur.

L'angle  $\widehat{DBO}$  a pour mesure

$$\text{arc} \frac{NBD}{2} = \frac{DE}{2}.$$

La différence de ces deux angles, c'est-à-dire le supplément de  $xOy$ , a donc pour mesure dans le cercle générateur un arc égal à  $\frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$ .

Donc, AB est une longueur constante et, si l'on désigne e





Or,  $\Omega$  étant la vitesse angulaire autour du point O au même instant,

$$v(A) = \Omega \cdot OA.$$

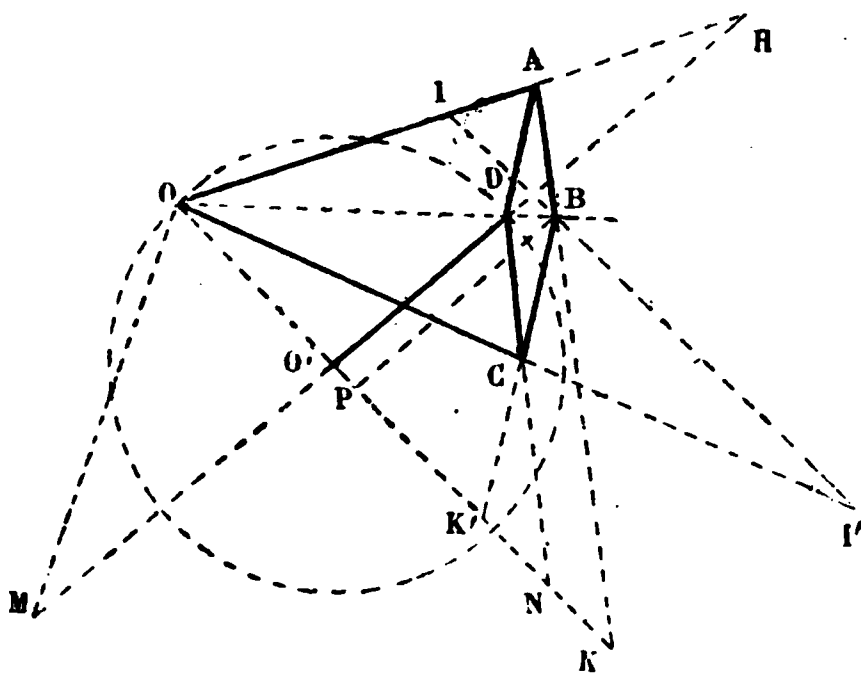
Par suite,

$$\frac{v(B)}{\Omega \cdot OA} = \frac{OK}{OA}$$

ou

$$(2) \quad \frac{v(B)}{\Omega} = OK.$$

Maintenant, le point D décrivant la circonférence de rayon  $O'D$ , j'ai le centre instantané de rotation H de la



droite AD en prenant le point de rencontre des droites OA et O'D. On a

$$(3) \quad \frac{v(A)}{v(D)} = \frac{HA}{HD}.$$

Multiplions (1) et (3) membre à membre; il vient

$$\frac{v(B)}{v(D)} = \frac{HA \cdot OK}{HD \cdot OA}.$$

Tirons OM parallèlement à AD :

$$\frac{HA}{HD} = \frac{OA}{DM}.$$

Or, les triangles ODM et ODN étant égaux,

$$DM = ON.$$

Donc

$$\frac{HA}{HD} = \frac{OA}{ON}$$

et

$$\frac{v(B)}{v(D)} = \frac{OA \cdot OK}{ON \cdot OA} = \frac{OK}{ON}.$$

Mais, si  $\omega$  est la vitesse autour de  $O'$  à l'instant considéré,

$$v(D) = \omega \cdot O'D,$$

et l'égalité précédente devient

$$\frac{v(B)}{\omega \cdot O'D} = \frac{OK}{ON},$$

ou

$$\frac{v(B)}{\omega} = \frac{OK \cdot O'D}{ON}.$$

Tirons BP parallèlement à  $O'D$  :

$$BP = \frac{OK \cdot O'D}{ON}.$$

Par suite,

$$(4) \quad \frac{v(B)}{\omega} = BP.$$

Occupons-nous maintenant de la vitesse angulaire  $\Omega'$  de OC autour de O, prise toujours au même instant.

Le point de rencontre  $I'$  de BI et de OC donne le centre instantané de rotation de la droite BC. Donc

$$\frac{v(B)}{v(C)} = \frac{BI'}{CI'} = \frac{OK'}{OC}$$

ou

$$\frac{v(B)}{\Omega' \cdot OC} = \frac{OK'}{OC},$$

$$\frac{v(B)}{\Omega'} = OK'.$$

éunissant les égalités (2), (4) et (5), nous voyons

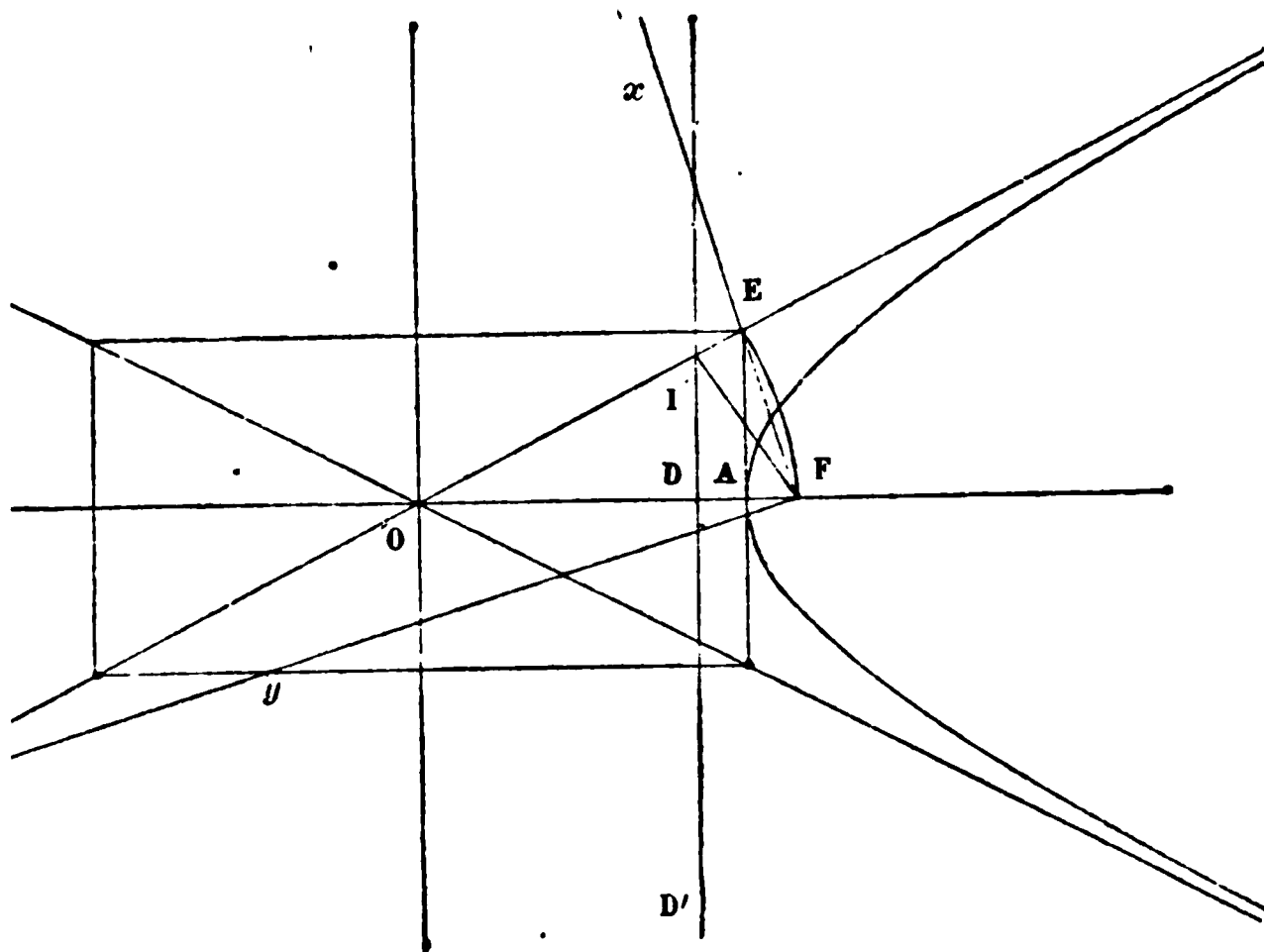
$$v(B) = \omega \cdot BP = \Omega \cdot OK = \Omega' \cdot OK'.$$

## DITIONS DE QUELQUES QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

PAR M. L'ABBÉ A. GENEIX-MARTIN.

*Équation générale des hyperboles ayant un point  
né pour foyer, et telles qu'un des sommets du rec-  
gle construit sur les axes soit en un point donné.*

renons le foyer fixe F pour pôle, le point fixe E étant



sommet du rectangle construit sur les axes, prenons FE

pour axe polaire. L'équation de la courbe sera de la forme

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 (x \cos \omega + y \sin \omega - d)^2.$$

Il faut déterminer  $\varepsilon$  et  $d$ .

Nous savons qu'on obtient le foyer en décrivant de  $O$  comme centre un arc de rayon  $OE$ ; donc le triangle  $EOF$  est isocèle : la directrice est  $IDD'$ , on sait la construire.

On a

$$\widehat{FEO} = \widehat{EFO} = \omega.$$

Soit

$$EF = l,$$

on a

$$l = 2c \cos \omega,$$

d'où

$$c = \frac{l}{2 \cos \omega}.$$

On a aussi

$$IF = b = l \sin \omega; \quad OI = a = -c \cos 2\omega = -\frac{l \cos 2\omega}{2 \cos \omega};$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = -\frac{1}{\cos 2\omega}, \quad FD = d = \frac{b^2}{c} = 2l \sin^2 \omega \cos \omega.$$

L'équation générale demandée est donc

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\cos^2 2\omega} (x \cos \omega + y \sin \omega - 2l \sin^2 \omega \cos \omega)^2.$$

II. *Lieu des foyers des hyperboles équilatères ayant un centre fixe  $O$ , et passant par un point fixe  $A$ .*

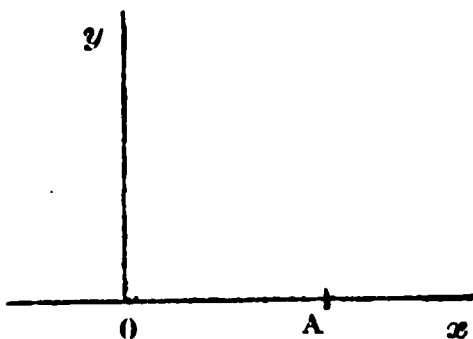
Prenons  $OA$  pour axe des  $x$ , et une perpendiculaire en  $O$  à  $OA$  pour axe des  $y$ ; posons  $OA = a$ . Soit  $(\alpha, \beta)$



un foyer. L'équation des hyperboles considérées est de la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 2(x \cos \omega + y \sin \omega - d)^2.$$

Elle renferme deux paramètres arbitraires  $\omega$  et  $d$ .



L'origine étant au centre, les coefficients des termes du premier degré doivent être nuls, ce qui donne

$$(1) \quad \alpha = 2d \cos \omega, \quad \beta = 2d \sin \omega,$$

d'où

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4d^2, \quad d = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}, \quad \cos \omega = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Exprimons que la courbe passe par le point A

$$(x = a, \quad y = 0),$$

il vient, en tenant compte de la première des relations (1),

$$a^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 2(a^2 \cos^2 \omega + d^2).$$

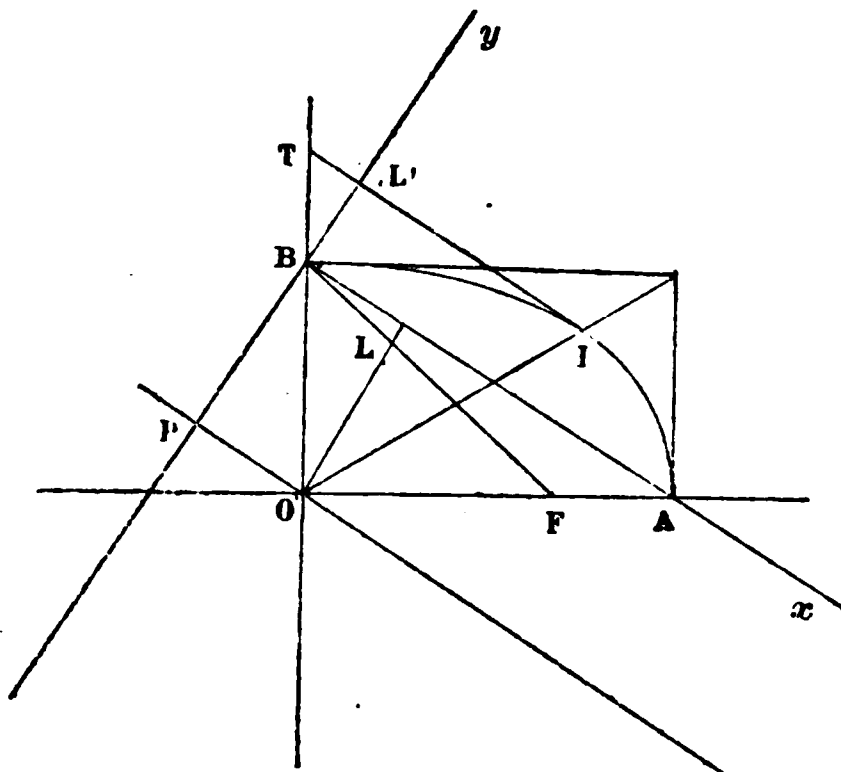
Remplaçons dans cette relation  $\cos \omega$  et  $d$  par les valeurs que nous venons de trouver, il vient pour l'équation du lieu

$$(a^2 + \beta^2)^2 - 2a^2(a^2 - \beta^2) = 0.$$

C'est l'équation d'une lemniscate qui a pour foyers le



Prenons BA pour axe des  $x$ , et une perpendiculaire en B pour axe des  $y$ . Prenons  $BP = \delta \left( \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)$ ; par le point P



menons une parallèle à l'axe des  $x$ ; elle passe par le centre  $O$ . Soit  $\gamma = \beta$  l'équation de la droite  $PO$ .

Menons de l'origine la droite BO ( $y = mx$ ); les coordonnées du point O sont  $y = \beta$ ,  $x = \frac{\beta}{m}$ . L'équation de la droite OF, perpendiculaire à OB, est

$$m^2(y - \beta) + mx - \beta = 0.$$

L'abscisse du point A où elle rencontre l'axe des  $x$  est  $x = \frac{(m^2 + 1)\beta}{m}$ . Donc

$$\overline{OA}^2 = \beta^2 (1 + m^2).$$

Puisque  $\text{BF} = \text{OA}$ , décrivons de l'origine comme centre le cercle de rayon  $\beta \sqrt{1 + m^2}$ . Son équation est

$$(1) \quad x^2 + y^2 = \beta^2 (1 + m^2).$$



3° On mène à chaque parabole une tangente perpendiculaire à la droite AB, trouver le lieu des points de contact et construire ce lieu.

NOTATIONS. — AB étant prise pour axe des  $y$ , et une perpendiculaire pour axe des  $x$ , on fera  $AB = 2a$ , en appelant  $m$  le coefficient angulaire de la direction des diamètres des paraboles considérées.

Je prends le milieu de AB pour origine.

L'équation générale des paraboles ayant  $m$  pour coefficient angulaire de la direction de leurs diamètres est

$$(y - mx)^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0.$$

L'équation

$$y - mx = 0$$

représente le diamètre mené par l'origine, et

$$2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0$$

est l'équation de la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Ces paraboles devant passer par les points A et B, dont les coordonnées sont  $(0, a)$  et  $(0, -a)$ , on a les équations de condition

$$a^2 + 2\mu a + \nu = 0, \quad a^2 - 2\mu a + \nu = 0.$$

d'où

$$\mu = 0 \quad \text{et} \quad \nu = -a^2;$$

donc : 1° l'équation générale demandée est

$$(1) \quad (y - mx)^2 + 2\lambda x - a^2 = 0;$$

2° l'équation (1) peut s'écrire identiquement

$$(y - mx + h)^2 - 2h(y - mx) + 2\lambda x - a^2 - h^2 = 0,$$

ou

$$(y - mx + h)^2 + 2(\lambda + mh)x - 2hy - a^2 - h^2 = 0.$$

L'équation

$$y - mx + h = 0$$

représente un diamètre quelconque, et

$$2(\lambda + mh)x - 2hy - a^2 - h^2 = 0,$$

la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

En exprimant que ces droites sont perpendiculaires, on aura les équations de l'axe et de la tangente au sommet.

La condition est

$$m\left(\frac{\lambda + mh}{h}\right) + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\frac{m\lambda}{m^2 + 1}.$$

Il s'ensuit que l'équation de l'axe est

$$y - mx - \frac{m\lambda}{m^2 + 1} = 0,$$

et celle de la tangente au sommet

$$x + my - \frac{a^2(m^2 + 1)^2 + m^2\lambda^2}{2(m^2 + 1)\lambda} = 0.$$

De ces deux équations, on tire

$$x = \frac{a^2(m^2 + 1)^2 - m^2\lambda^2}{2\lambda(m^2 + 1)^2}$$

et

$$y = \frac{m(m^2 + 2)\lambda^2 + m(m^2 + 1)^2 a^2}{2\lambda(m^2 + 1)^2}.$$

Ces valeurs de  $x$  et  $y$  sont les coordonnées du sommet et des paraboles.

Le foyer sera déterminé par l'intersection de l'axe et de la droite représentée par l'équation

$$x + my - \frac{a^2(m^2 + 1)^2 + (m^2 - 1)\lambda^2}{2\lambda(m^2 + 1)} = 0.$$

(Voir les *Nouvelles déterminations analytiques des foyers et directrices*, par M. Georges Dostor) (¹).

La résolution des équations

$$x + my - \frac{a^2(m^2 + 1)^2 + (m^2 - 1)\lambda^2}{2\lambda(m^2 + 1)} = 0,$$

(¹) Il est facile de trouver les coordonnées du foyer sans avoir recours aux formules générales des *Nouvelles déterminations analytiques*, etc., car l'ordonnée du foyer est égale à celle du point de concours des deux tangentes représentées par les équations

$$2\lambda x - a^2 = 0 \quad \text{et} \quad x + my - \frac{a^2(m^2 + 1)^2 + m^2\lambda^2}{2(m^2 + 1)\lambda} = 0,$$

et l'abscisse s'obtient au moyen de l'équation

$$y - mx - \frac{m\lambda}{m^2 + 1} = 0$$

de l'axe, en remplaçant  $y$  par la valeur de l'ordonnée. Cela résulte simplement de ce que le lieu des projections du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet.

On peut encore, sans connaître l'équation de la tangente au sommet, déterminer le foyer par un calcul qui s'appuie sur les considérations suivantes.

Il est d'abord évident que la différence des distances des deux points A, B à la directrice est égale à la projection de AB sur la direction des diamètres; cette projection est exprimée par le produit

$$2a \cdot \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}, \text{ indépendant de la variable } \lambda.$$

La différence des distances des points A, B au foyer est, de même, égale à  $2a \cdot \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$ ; il s'ensuit que le lieu du foyer de l'une quelconque des paraboles considérées est l'hyperbole dont A, B sont les foyers, et l'axe focal, ou traverse,  $\frac{2ma}{\sqrt{m^2 + 1}}$ . L'équation de cette hyperbole est

$$(m^2 + 1)y^2 - m^2(m^2 + 1)x^2 - m^2a^2 = 0;$$

donc, en résolvant le système des deux équations

$$(m^2 + 1)y^2 - m^2(m^2 + 1)x^2 - m^2a^2 = 0, \quad y - mx - \frac{m\lambda}{m^2 + 1} = 0,$$

on aura les coordonnées cherchées.

(G.)

et

$$y - mx - \frac{m\lambda}{m^2 + 1} = 0,$$

donne pour les coordonnées du foyer

$$x = \frac{a^2(m^2 + 1) - \lambda^2}{2(m^2 + 1)\lambda}, \quad y = \frac{a^2m(m^2 + 1) + \lambda^2m}{2(m^2 + 1)\lambda}.$$

3° Le coefficient angulaire des tangentes perpendiculaires à AB est nul; on a donc au point de contact

$$-m(y - mx) + \lambda = 0 \quad \text{et} \quad (y - mx)^2 + 2\lambda x - a^2 = 0.$$

En éliminant  $\lambda$  entre ces deux équations, il vient

$$y^2 - m^2x^2 - a^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{\left(\frac{a^2}{m^2}\right)} - \frac{y^2}{a^2} + 1 = 0,$$

équation du lieu géométrique des points de contact. Cette équation représente une hyperbole rapportée à ses axes, et ayant ses sommets réels aux points A et B. Ses asymptotes ont pour équation  $y^2 - m^2x^2 = 0$ ; l'une d'elles est le diamètre de la parabole, mené par l'origine, l'autre est symétrique par rapport à l'axe des  $y$ ; il est donc très facile de construire cette courbe.

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1881.

### *Composition de Mathématiques.*

Une parabole étant donnée, on lui mène une normale en l'un des points situés avec le foyer sur une même perpendiculaire à l'axe. Trouver le lieu des sommets des sections faites par des plans contenant cette normale dans le cylindre dont la parabole donnée est section droite.



*Composition littéraire.*

Développer la pensée suivante : Le culte de la vérité prend des formes différentes avec les époques. De notre temps, le noble rêve du bonheur de l'humanité future sur la terre par les découvertes de la science, par les applications de l'industrie, par les réformes politiques et sociales, c'est-à-dire, en un mot, la philosophie du progrès devient dans certaines âmes une sorte de religion. C'est ainsi que la science en est arrivée à avoir ses temples, ses sacrifices, ses apôtres et ses martyrs.

*Composition de Lavis (trois heures).*

Faire à l'encre de Chine, à teintes plates, le lavis d'un

22

cône de révolution reposant sur un socle cylindrique et se détachant sur un fond gris uniforme.

On se conformera aux cotes indiquées en millimètres sur le croquis ci-joint.

*Nota.* Les traits pour le cadre, les arêtes ou les contours apparents des solides seront faits à l'encre.

On observera les filets de lumière.

### *Composition de Calcul.*

Étant donnés, dans un triangle, deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$b = 483^{\text{m}},76, \quad c = 675^{\text{m}},37, \quad A = 35^{\circ}42'15'',$$

calculer les deux angles B et C, le troisième côté  $a$ , la longueur de la perpendiculaire abaissée de A sur  $a$  et la distance du pied de cette perpendiculaire au sommet C.

### *Composition de Géométrie descriptive.*

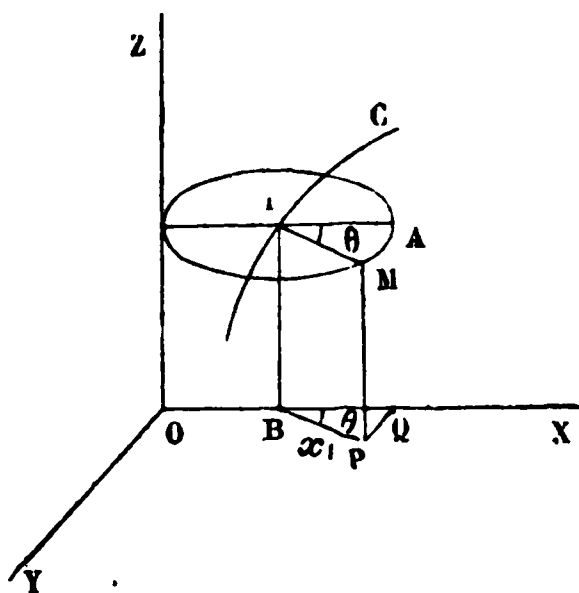
On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté  $a = 0^{\text{m}},190$ , dont la base ABC est située dans le plan horizontal, et dont le sommet D est au-dessus de ce plan. Le point A est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans la face BCD. Le point B est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans la face ACD.

On demande de représenter en projection horizontale le corps qui reste, quand on supprime dans le tétraèdre la partie comprise dans le premier cône et la partie comprise dans le second. Indiquer les constructions faites pour trouver un point de l'intersection des cônes et la tangente en ce point.

**QUESTION DE LICENCE (PARIS, JUILLET 1880);**

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE.

*Soient OX, OY, OZ trois axes de coordonnées rectangulaires, et dans le plan ZOX une courbe donnée C. Une surface est engendrée par une circonférence de cercle dont le plan reste parallèle au plan XOY, dont le centre décrit la courbe C, et qui rencontre constamment OZ. On demande de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface, en pre-*



*nant pour variables la coordonnée  $z$  d'un point M et l'angle  $\theta$  du rayon du cercle qui passe en ce point avec la trace du plan du cercle sur le plan ZOY. Application au cas où la courbe C est une parabole, ayant le point O pour sommet et OX pour axe.*

Soient  $x, y, z$  les coordonnées du point M;  $x_1$  l'abscisse OB de la projection du centre I; et  $x_1 = \varphi(z)$  l'équation de la courbe C. On a

$$(1) \quad x = x_1(1 + \cos \theta), \quad \text{ou} \quad x = \varphi(z)(1 + \cos \theta),$$

$$(2) \quad y = x_1 \sin \theta, \quad \text{ou} \quad y = \varphi(z) \sin \theta;$$

par suite, l'équation de la surface est

$$(3) \quad \begin{cases} [x - \varphi(z)]^2 + y^2 = \varphi^2(z), \\ \text{ou} \\ x^2 + y^2 - 2x\varphi(z) = 0. \end{cases}$$

On déduit de là

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{x - \varphi(z)}{x\varphi'(z)} \\ = \frac{\cos\theta}{1 + \cos\theta} \frac{1}{\varphi'(z)} = \frac{1}{2} \left( 1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{1}{\varphi'(z)},$$

$$q = \frac{dz}{dy} = \frac{y}{x\varphi'(z)} \\ = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} \frac{1}{\varphi'(z)} = \tan \frac{\theta}{2} \frac{1}{\varphi'(z)},$$

$$dp = -\frac{1}{2} \frac{1}{\varphi'^2(z) \cos^2 \frac{\theta}{2}} \left[ \cos\theta \varphi''(z) dz + \varphi'(z) \tan \frac{\theta}{2} d\theta \right],$$

$$dq = \frac{1}{2} \frac{1}{\varphi'^2(z) \cos^2 \frac{\theta}{2}} [\sin\theta \varphi''(z) dz - \varphi'(z) d\theta],$$

$$dx = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left[ \cos \frac{\theta}{2} \varphi'(z) dz - \sin \frac{\theta}{2} \varphi(z) d\theta \right],$$

$$dy = \sin\theta \varphi'(z) dz + \varphi(z) \cos\theta d\theta.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation générale des lignes asymptotiques

$$dp dx + dq dy = 0,$$

on aura l'équation demandée :

$$\begin{aligned} & 2 \cos \frac{\theta}{2} \left[ \cos \theta \varphi''(z) dz + \varphi'(z) \tan \frac{\theta}{2} d\theta \right] \\ & \times \left[ \cos \frac{\theta}{2} \varphi'(z) dz - \sin \frac{\theta}{2} \varphi(z) d\theta \right] \\ & + [\sin\theta \varphi''(z) dz - \varphi'(z) d\theta] \\ & \times [\sin\theta \varphi'(z) dz + \varphi(z) \cos\theta d\theta] = 0. \end{aligned}$$

ou

$$(4) \quad \sqrt{\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}} dz = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\theta}{\cos \frac{\theta}{2}}.$$

*Application.* — Dans le cas où la courbe C est une parabole, on a

$$\varphi(z) = \frac{z^2}{2p},$$

d'où

$$\varphi'(z) = \frac{z}{p}, \quad \varphi''(z) = \frac{1}{p}.$$

L'équation (4) devient alors

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}},$$

d'où

$$\log z = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right) + \log C$$

et

$$z = C \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right).$$

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### Question 231

( voir 1<sup>re</sup> série, t. XI, p. 114 );

PAR M. J. BOURGET,

Docteur ès Sciences.

*Placer les huit premiers nombres sur une même ligne, de telle sorte que la différence de deux quelconques de ces nombres ne soit pas égale à la différence*

*de leurs rangs dans la ligne. Combien existe-t-il de dispositions de ce genre ?*

17582463

*est une de ces dispositions.*

*Placer sur un échiquier huit reines, de manière qu'aucune d'elles ne soit en prise à l'une des sept autres ?*

*La solution est une conséquence de la précédente.*

(E. LIONNET.)

Ce problème est évidemment difficile : il s'agit de choisir, parmi les 40320 permutations des huit chiffres (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) celles qui satisfont à la condition imposée par l'énoncé.

A la page 148 du tome XI, 1<sup>re</sup> série des *Nouvelles Annales*, Terquem dit, dans une Note, que Koralek, par un procédé empirique, a trouvé que le problème de Lionnet a 92 solutions, dont 12 seulement sont distinctes, mais il ne nous fait pas connaître ces solutions, ni le procédé employé par Koralek pour arriver à ces conclusions.

En m'occupant du problème des permutations, j'ai été naturellement amené à réfléchir au problème de Lionnet. Après l'avoir transformé en un problème d'Analyse indéterminée, j'ai pu trouver un procédé graphique conduisant sûrement à toutes les solutions du problème. Ce procédé graphique peut être comparé au crible d'Ératosthènes, pour la détermination des nombres premiers ; c'est peut-être le procédé empirique de Koralek. Quoi qu'il en soit, il me semble qu'il constitue une solution rationnelle du problème proposé, en ce sens qu'il réduit la considération de 40320 permutations à la construction d'environ 300 petits Tableaux faciles à faire.

En suivant ce procédé, que je ferai connaître tout à

l'heure, j'ai trouvé, comme Koralek, 92 permutations satisfaisant à la condition imposée.

Au point de vue du problème des échecs, ces 92 solutions ne donnent que 24 figures distinctes. On comprend, en effet, que plusieurs permutations correspondent à la même disposition des dames sur un échiquier, en prenant successivement comme base de l'échiquier ses quatre côtés. Ces 24 figures peuvent même être regardées comme se réduisant à 12, en remarquant qu'elles se divisent en groupes de deux symétriques relativement à la base supérieure et à la base inférieure de l'échiquier.

Nous nous expliquons ainsi le résultat annoncé par Koralek.

Voici comment nous avons procédé :

Imaginons un échiquier de 64 cases. Le long de la première ligne verticale nous ferons mouvoir le chiffre 1, le long de la seconde ligne le chiffre 2, ainsi de suite. Il

8	
7	
6	
5	
4	♂
3	
2	
1	

ne devra jamais y avoir plus d'un chiffre sur une même ligne horizontale, et si nous dispersons ainsi les huit chiffres en remplissant les deux conditions que nous venons d'énoncer, nous aurons chaque fois une permutation des huit chiffres, pour laquelle le rang occupé par chaque chiffre sera le numéro de la ligne horizontale sur laquelle il se trouve. Dans la figure ci-contre nous trouvons la permutation

17582463





**t**i satisfaisant à la condition Lionnet; donc, quand nous aurons placé 1 aux rangs 1, 2, 3, 4, nous pourrons nous arrêter. Les autres permutations seront celles que nous aurons déjà trouvées, lues en sens inverse. Le travail ainsi réduit exige environ 300 opérations. C'est peu, si l'on remarque que le nombre total des permutations parmi lesquelles on a choisi est 40320.

Voici le tableau des 46 permutations que nous avons trouvées :

17582463	26174835	25713864
17468253	53172864	28613574
16837425	83162574	62713584
15863724	46152837	72418536
	57142863	82417536
61528374	63184275	52814736
41582736	53168247	62714853
51842736	63185247	52617483
31758246	48136275	35714286
51468273	84136275	64718253
71386425	48157263	58417263
51863724	47185263	36815724
41586372	64158273	75316824
	63175824	64713528
	73168524	58413627
	57138642	36418572
		36814752
		57413862

En lisant chacun de ces résultats en sens inverse, nous en obtenons 46 autres satisfaisant encore à la condition imposée: donc nous avons en tout, comme le dit Koralék, 92 permutations différentes jouissant de la propriété indiquée dans l'énoncé.

Mais, au point de vue des échecs, ces permutations ne constituent pas toutes des solutions différentes. En effet, on peut prendre pour base de l'échiquier un côté quelconque, et si l'on considère une des solutions précé-

dentes, par exemple celle qui est indiquée par Lionnet; elle donne, en prenant successivement chaque côté pour base, les solutions

84136275, 63571428, 42736851.

Donc on peut classer les solutions du Tableau précédent et leurs inverses en groupes donnant sur l'échiquier la même figure.

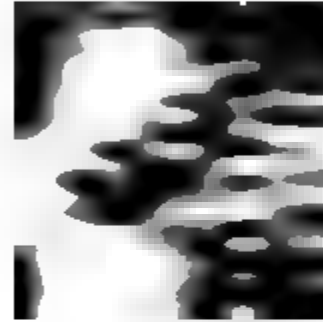
Voici le Tableau de cette classification qui renferme 24 groupes :

(1).....	17582463	84136275	63571428	42736851
(2).....	17468253	83162574	64713528	52473861
(3).....	51468273	73168524	62713584	57413862
(4).....	71386425	41586372	72631483	47531682
(5).....	61528374	57138642	52617483	75316824
(6).....	41582736	36271485	46831752	74286135
(7).....	51842736	36814752	36275184	74258136
(8).....	31758246	35714286	53847162	73825165
(9).....	51863724	36418572	72418536	57263185
(10)...	57142863	64158273	63175824	62714853
(11)...	63184275	47185263	42751863	63741825
(12)...	53172864	64718253		
(13)...	15863724	82417536	57263148	3642857
(14)...	16837425	82531746	47526138	3528647
(15)...	26831475	48531726	42586137	3728641
(16)...	28613574	58413627	27368514	5246831
(17)...	42861357	38471625	24683175	4738251 6
(18)...	53168247	25713864	58417263	6372851 4
(19)...	63185247	48157263	25741863	6372481 5
(20)...	26174835	46152837	68241753	6428571 3
(21)...	48136275	27581463	63581427	427368 5
(22)...	35841726	42857136	37285146	368241 5
(23)...	52814736	57248136	36258174	368157 4
(24)...	35281746	46827135		

Ces 24 groupes se divisent en deux groupes de 12 termes chacun, jouissant de cette propriété que la figure correspondante à l'un des groupes de la première

série de 12 est symétrique de la figure correspondante au groupe de même rang dans la seconde série. En d'autres termes, si l'on trace la figure formée par un des groupes de la première série de 12 sur une feuille de papier, en retournant la feuille et regardant la figure par transparence, on obtient la figure donnée par le groupe de même rang dans la seconde série de 12.

Donc, au point de vue du problème des échecs, on peut dire, avec Koralek, qu'il n'y a que 12 solutions distinctes donnant les figures du Tableau suivant :



Ces figures correspondent à chacun des 12 premiers groupes.

Si l'on pouvait les trouver directement par une méthode simple, on pourrait en déduire les 92 permutations des huit premiers chiffres remplissant les conditions imposées par l'énoncé de Lionnet.

### QUESTION.

1376. Dans un cône donné on inscrit une sphère, et dans la partie laissée libre au-dessus de cette sphère on inscrit une nouvelle sphère; et ainsi de suite indéfiniment. Trouver l'expression du rayon de la  $(n + 1)^{\text{ième}}$  sphère, sachant que  $R$  est le rayon de base du cône,  $H$  la hauteur, et que  $C$  en représente le côté.

Prouver que l'espace laissé vide dans le cône par toutes ces sphères a pour volume

$$\frac{1}{3} \pi R^2 H \cdot \frac{5C^2 + 3R^2}{3C^2 + R^2}.$$

(G. DOSTOR.)

### RECTIFICATION.

L'observation faite par M. Genty (p. 370) sur la dernière partie de l'énoncé de la question 1306 est exacte, et cet énoncé doit être modifié comme il suit :

*Les tangentes de rebroussement passent respectivement par les six points où les côtés du triangle ABC coupent la conique  $C_2$ .*

Ces tangentes sont faciles à construire. Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  les points où  $AB$  coupe  $C_2$ , la tangente de rebroussement qui passe par  $\gamma_1$  est la droite qui joint ce point à celui où  $\gamma_2 C$  coupe  $C_2$ . DEWULF.











si l'on pose

$$c_l = \frac{1}{l!} \frac{(2\alpha + 1)(2\alpha + 3) \dots (2\alpha + 2l - 1)}{(2\alpha + l + 1)(2\alpha + l + 2) \dots (2\alpha + 2l)}.$$

Mais, en posant  $c_l = \frac{1}{l! 2^l}$ , nous trouverons pour la fonction génératrice des mêmes polynômes une autre expression

$$2^\alpha (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - ax + \sqrt{1 - 2ax + a^2})^{-\alpha},$$

moins simple que la précédente. On obtient facilement cette dernière expression au moyen de la formule de Lagrange

$$f' \frac{dz}{dx} = \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{a^l}{l!} \frac{d^l}{dx^l} \{f(x) [\varphi(x)]^l\},$$

où  $z$  est une fonction de  $a$  et de  $x$  déterminée par l'équation

$$z = x + a \varphi(z).$$

Pour cela, on n'a qu'à poser dans cette formule

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \quad f'(x) = (x^2 - 1)^\alpha.$$

En ayant égard à deux expressions précédentes pour la fonction génératrice des polynômes  $\pi_l$ , nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{a^l}{l! 2^l} \frac{1}{(x^2 - 1)^\alpha} \frac{d^l (x^2 - 1)^{\alpha+l}}{dx^l} \\ &= 2^\alpha (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - ax + \sqrt{1 - 2ax + a^2})^{-\alpha}, \\ & \sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{a^l}{l!} \frac{(2\alpha + 1)(2\alpha + 3) \dots (2\alpha + 2l - 1)}{(2\alpha + l + 1)(2\alpha + l + 2) \dots (2\alpha + 2l)} \\ & \times \frac{1}{(x^2 - 1)^\alpha} \frac{d^l (x^2 - 1)^{\alpha+l}}{dx^l} = (1 - 2ax + a^2)^{-\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \right.$$



et, en supposant d'abord  $m$  constant, il faut déterminer la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \frac{2^n (\beta + m + 1) \dots (\beta + m + n)}{(2\beta + 2m + n + 2) \dots (2\beta + 2m + 2n + 1)} \\ \times \frac{1}{(y^2 - 1)^{\beta + m + \frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2 - 1)^{\beta + m + n + \frac{1}{2}}}{dy^n}.$$

La seconde des formules (5) donne immédiatement l'expression simple

$$(1 - 2by + b^2)^{-(\beta + m + 1)};$$

en posant dans cette formule  $\alpha = \beta + m + \frac{1}{2}$ , et en remplaçant les lettres  $x$ ,  $a$ ,  $l$  respectivement par  $y$ ,  $b$ ,  $n$ .

On n'a qu'à transformer l'expression

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! 2^m} \left( \frac{a}{1 - 2by + b^2} \right)^m \frac{(2\beta + 1) \dots (2\beta + m)}{(\beta + 1) \dots (\beta + m)} \\ \times \frac{1}{(x^2 + y^2 - 1)^\beta} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^{\beta + m}}{dx^m},$$

et la multiplier par le facteur  $(1 - 2by + b^2)^{-(\beta + 1)}$  pour avoir la fonction génératrice demandée. Pour transformer cette dernière somme, au moyen de la seconde des formules (5), nous remarquons d'abord qu'en changeant  $x$  en  $\frac{x}{\sqrt{1 - y^2}}$ , faisant  $a = a' \sqrt{1 - y^2}$  et ayant de plus égard à l'égalité

$$\frac{(2\alpha + 1)(2\alpha + 3) \dots (2\alpha + 2l - 1)}{(2\alpha + l + 1)(2\alpha + l + 2) \dots (2\alpha + 2l)} \\ = \frac{1}{2^l} \frac{(2\alpha + 1)(2\alpha + 2) \dots (2\alpha + l)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + l)},$$

cette formule deviendra

$$\sum_{l=0}^{l=\infty} \frac{a'^l}{l! 2^l} \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)\dots(2\alpha+l)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+l)} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\alpha} \\ \times \frac{d^l (x^2+y^2-1)^{\alpha+l}}{dx^l} = [1-2a'x-a'^2(y^2-1)]^{-(\alpha+\frac{1}{2})}$$

En supposant ici

$$a' = \frac{a}{1-2by+b^2},$$

et en changeant les lettres  $l$  et  $\alpha$  respectivement en  $m$  et  $\beta$ , nous aurons pour la somme cherchée l'expression

$$(1-2by+b^2)^{2\beta+1} [(1-2ax-2by+b^2) \\ \times (1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-(\beta+\frac{1}{2})}.$$

En la multipliant par  $(1-2by+b^2)^{-(\beta+1)}$ , nous obtiendrons enfin l'expression de la fonction génératrice demandée (4), que l'on peut présenter encore comme il suit :

$$(1-2by+b^2)^\beta [(1-2ax-2by+a^2+b^2) \\ \times (1-2by+b^2)-a^2(y-b)^2]^{-(\beta+\frac{1}{2})}.$$

En posant, dans les formules (6) et (4),  $\beta = 0$ , nous obtiendrons les formules (2) et (3).

Donc les polynômes  $\Omega_{m,n}$  peuvent être définis par l'égalité

$$(1-2by+b^2)^\beta [(1-2ax-2by+b^2) \\ \times (1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-(\beta+\frac{1}{2})} \\ = \sum a^m b^n \Omega_{m,n},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières de  $m$  et  $n$  depuis 0 jusqu'à l'infini. Voici quelques-uns de

ces polynômes dans les cas les plus simples :

$$\Omega_{0,0} = 1,$$

$$\Omega_{1,0} = (2\beta + 1)x,$$

$$\Omega_{0,1} = 2(\beta + 1)y,$$

$$\Omega_{2,0} = \frac{2\beta + 1}{2} [(2\beta + 3)x^2 + y^2 - 1],$$

$$\Omega_{1,1} = 2(2\beta + 1)(\beta + 2)xy,$$

$$\Omega_{0,2} = (\beta + 1)[2(\beta + 2)y^2 - 1],$$

$$\Omega_{3,0} = \frac{(2\beta + 1)(2\beta + 3)}{2 \cdot 3} [(2\beta + 5)x^3 + 3xy^2 - 3x],$$

$$\Omega_{2,1} = (\beta + 3)(2\beta + 1)[(2\beta + 3)x^2y + y^3 - y],$$

$$\Omega_{1,2} = (\beta + 2)(2\beta + 1)[2(\beta + 3)xy^2 - x],$$

$$\Omega_{0,3} = \frac{2}{3}(\beta + 1)(\beta + 2)[2(\beta + 3)y^3 - 3y],$$

.....

Ces polynômes, ayant la fonction génératrice spéciale, ont des propriétés complètement analogues à celles des polynômes  $\varpi_l$ . Je ferai voir, dans une autre occasion, quelques-unes de ces propriétés.

## THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DANS LES COURBES ALGÈBRIQUES (1);

PAR M. CH. BIEHLER.

### TROISIÈME PARTIE.

1. Cette troisième Partie a pour objet la construction des branches paraboliques fournies par une direction multiple de points à l'infini.

(1) Voir même Tome, p. 97.



l'équation (3) prendra la forme

$$\varphi_m(t) + \lambda t \varphi_{m-1}(t) + \lambda^2 t^2 \varphi_{m-2}(t) + \dots + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0.$$

2. Lorsque la droite  $x = \frac{1}{\lambda}$  s'éloignera indéfiniment l'origine, c'est-à-dire lorsque  $\lambda$  tendra vers zéro, une ou plusieurs valeurs de  $t$  devront tendre vers zéro, si les branches paraboliques dans la direction de l'axe des  $y$ .

Or, l'équation (4) développée devient

$$\begin{aligned} & \varphi_m(0) + t \varphi'_m(0) + \frac{t^2}{1.2} \varphi''_m(0) + \dots + \frac{t^m}{m!} \varphi^{(m)}_m(0) \\ & + \lambda t \left[ \varphi_{m-1}(0) + t \varphi'_{m-1}(0) + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}_{m-1}(0) \right] + \dots \\ & + \lambda^{m-1} t^{m-1} [\varphi_1(0) + t \varphi'_1(0)] + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0. \end{aligned}$$

Il faut donc que  $\varphi_m(0) = 0$  et  $\varphi'_m(0) = 0$ , pour que l'équation (5) puisse être satisfaite pour un système de valeurs infiniment petites de  $\lambda$  et de  $t$ , c'est-à-dire que la direction de l'axe des  $y$  soit une direction double de l'axe des  $x$  à l'infini, ce qui est bien connu. L'équation (5), sous cette hypothèse, devient, après avoir été débarrassée du facteur  $t$ ,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{t}{1.2} \varphi''_m(0) + \dots + \frac{t^{m-1}}{m!} \varphi^{(m)}_m(0) \right. \\ & \quad \left. + \lambda [\varphi_{m-1}(0) + t \varphi'_{m-1}(0) + \dots] + \dots \right. \\ & \quad \left. + \lambda^{m-1} t^{m-2} [\varphi_1(0) + t \varphi'_1(0)] + \lambda^m t^{m-1} \varphi_0 = 0. \right. \end{aligned}$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$t \left[ \frac{1}{1.2} \varphi''_m(0) + \alpha \right] + \lambda [\varphi_{m-1}(0) + \beta] = 0;$$

on tire

$$t = - \frac{\varphi_{m-1}(0) + \beta}{\frac{1}{1.2} \varphi''_m(0) + \alpha} \times \lambda;$$





iment petite change aussi de signe et donne la branche  $M'N'$  située de l'autre côté de l'axe de  $y$ . La figure est construite dans l'hypothèse où le coefficient de  $\lambda$  dans la formule (8) est positif.

Supposons maintenant que  $\varphi_{m-1}(0)$  soit toujours différent de zéro et qu'un certain nombre de dérivées de la fonction  $\varphi_m(t)$  soient nulles pour  $t = 0$ ; soient

$$\varphi_m''(0) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_m^{(q-1)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_m^{(q)}(0) \gtrless 0.$$

L'équation (6) prendra la forme

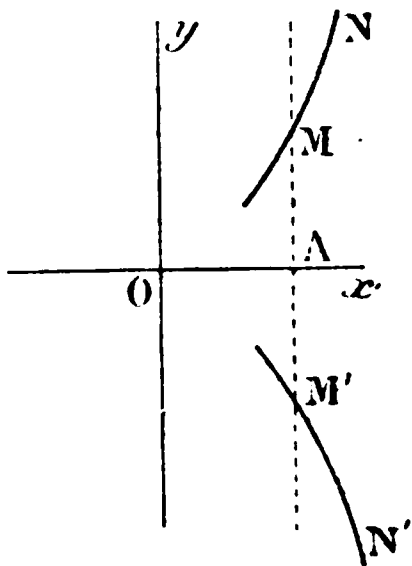
$$9) \quad t^{q-1} \left[ \frac{\varphi_m^{(q)}(0)}{q!} + \alpha \right] + \lambda [\varphi_{m-1}(0) + \beta] = 0,$$

et  $\beta$  renfermant dans tous leurs termes soit  $t$ , soit  $\lambda$  en facteur.

Si  $q - 1$  est impair, une seule des  $q - 1$  racines infinitiment petites de l'équation (9) qui tend vers zéro en prendra une courbe dont la forme générale est analogue à celle de la *fig. 1*.

Si  $q - 1$  est pair, deux des racines de l'équation (9) sont réelles; elles sont de signes contraires, mais il faut

Fig. 2.



pour cela que  $\lambda$  ait reçu une valeur dont le signe soit celui du rapport  $-\frac{\varphi_{m-1}(0)}{\varphi_m^{(q)}(0)}$ ; dans ce cas, la courbe affecte une forme semblable à celle de la *fig. 2*.

3. Supposons maintenant que  $\varphi_{m-1}(0) = 0$ .

L'équation (6) ne sera satisfaite pour de petites valeurs de  $\lambda$  et de  $t$  qu'autant que  $\varphi_m(0) = 0$ ,  $\varphi'_m(0) = 0$ ,  $\varphi''_m(0) = 0$ ; c'est-à-dire que la direction de l'axe des  $y$  doit être triple.

Dans ce cas, l'équation (6) prend la forme

$$t \left[ \frac{1}{1.2.3} \varphi'''_m(0) + \alpha \right] + \lambda [\varphi'_{m-1}(0) + \beta] = 0,$$

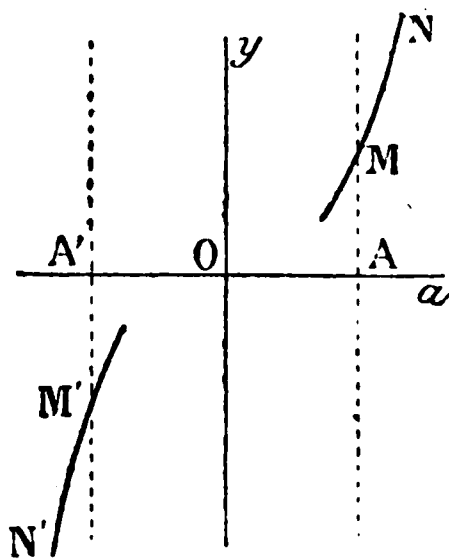
et l'on obtient encore des branches paraboliques analogues à celles de la *fig. 1*.

Mais si  $\varphi_{m-1}(0) = 0$  avec  $\varphi'_{m-1}(0) = 0$ , et si  $\varphi''_{m-1}(0) = 0$  est aussi nul, l'équation pourra s'écrire

$$(10) \quad t \left[ \frac{1}{1.2.3} \varphi'''_m(0) + \alpha \right] + \lambda^2 [\varphi_{m-2}(0) + \beta] = 0,$$

et la racine infiniment petite  $t$  engendre les branches  $MN, M'N'$  (*fig. 3*), situées de part et d'autre de l'axe des  $y$  et dans des régions opposées du plan; la *fig. 3* a été con-

Fig. 3.



struite dans l'hypothèse où le rapport  $\frac{\varphi_{m-2}(0)}{\varphi'''_m(0)}$  est négatif.

4. Considérons maintenant le cas où  $\lambda < 0$ .

$$z_n(0) = 0, \quad z_n'(0) = 1, \quad z_n''(0) = 0,$$

$$z_n'''(0) = 0, \quad z_n^{(4)}(0) = 0,$$

$$z_{m-1}(0) = 0, \quad z_{m-1}'(0) = 1, \quad z_{m-1}''(0) = 0, \quad z_{m-1}'''(0) = 0, \quad z_{m-1}^{(4)}(0) = 0,$$

l'équation 6 deviendra

$$(11) \quad t^2 \frac{z_n^{(4)}(t)}{4!} - \lambda t \frac{z_{n-1}^{(4)}(t)}{4!} - \lambda^2 z_{n-2}(t) - \gamma = 0,$$

$\gamma$  étant une somme de termes qui sont tous infiniment petits devant les trois premiers.

Si l'on pose  $t = \tau \times \lambda$ , l'équation 11 aura tous ses termes divisibles par  $\lambda^2$  et pourra s'écrire

$$(12) \quad \tau^2 \frac{z_n^{(4)}(\tau \lambda)}{4!} - \tau \frac{z_{n-1}^{(4)}(\tau \lambda)}{4!} - z_{n-2}(\tau \lambda) - \gamma' = 0,$$

$\gamma'$  étant une somme de termes qui restent tous  $\lambda$  en facteur.

Quand  $\lambda$  est très petit, la fonction  $\tau$  a une valeur aussi voisine que l'on veut de la valeur de l'une des racines de l'équation du second degré

$$(13) \quad \tau^2 \frac{z_n^{(4)}(0)}{4!} - \tau \frac{z_{n-1}^{(4)}(0)}{4!} - z_{n-2}(0) = 0.$$

Soient  $\tau_0$  et  $\tau_1$  les racines de l'équation 13.

Si  $\tau_0$  et  $\tau_1$  sont réelles et inégales, les valeurs des deux racines de l'équation 11 qui tendent vers zéro sont :

$$t = \tau_0 \lambda, \quad t = \tau_1 \lambda.$$

Si  $\tau_0$  et  $\tau_1$  sont de même signe, on obtient une disposition des branches analogues à celle que présente la fig. 4.

Si  $\tau_0$  et  $\tau_1$  sont de signes contraires, on obtient la fig. 5.

La *fig. 4* a été construite dans l'hypothèse où  $\tau_0$  et  $\tau_1$  sont positifs.

Si les racines de l'équation (13) sont imaginaires, il

Fig. 4.

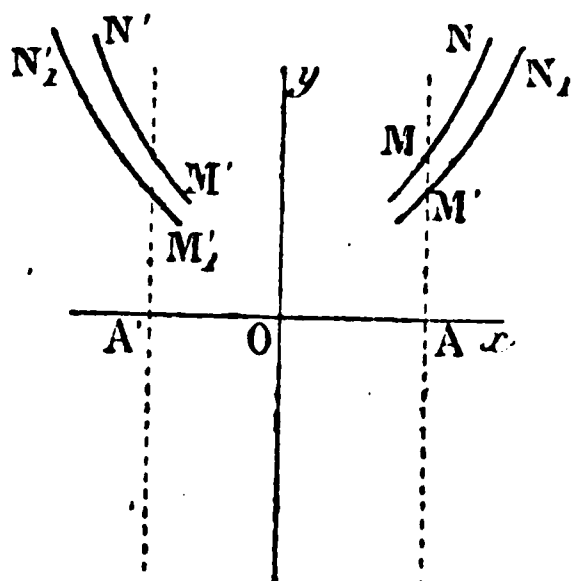
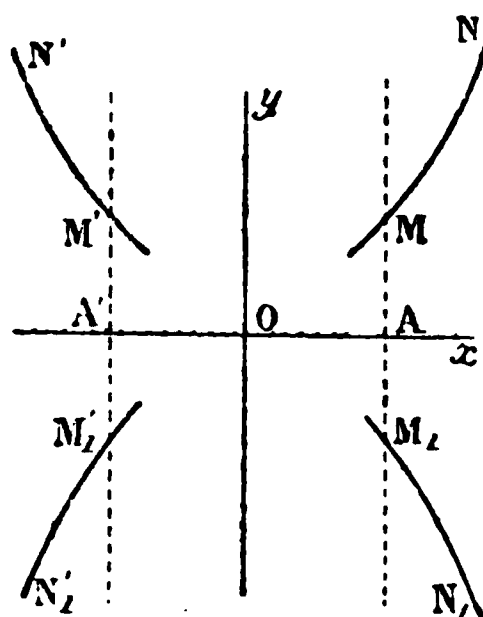


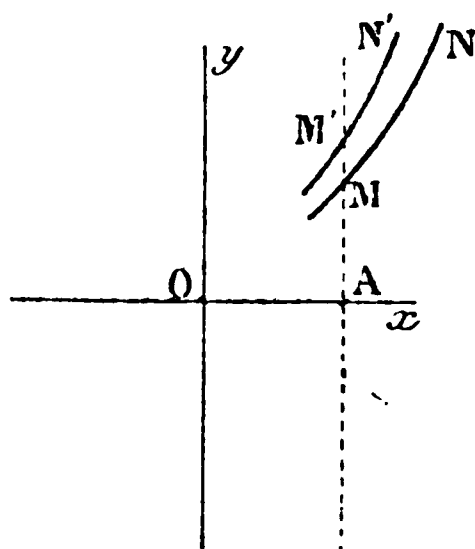
Fig. 5.



n'y a pas de branche parabolique réelle dans la direction de l'axe des  $y$ .

Enfin, si les racines de l'équation (13) sont égales

Fig. 6.



entre elles, l'équation (12) pourra se mettre sous la forme

$$\varphi_m^{iv}(0) (\tau - \tau_0)^2 + A\lambda + B\lambda^2 + \dots = 0;$$

les deux valeurs de  $\tau$  qui ont pour limite  $\tau_0$  ont donc

valeurs approchées

$$\tau = \tau_0 \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_m^{iv}(0)}} \times \lambda,$$

ar suite,

$$t = \tau_0 \lambda \pm \sqrt{\frac{-A}{\varphi_m^{iv}(0)}} \lambda^3.$$

Leux racines donnent naissance aux branches paraboliques de la *fig. 6*.

La discussion complète de l'équation (6) dans le cas où  $\varphi_{m-2}(0)$  est différent de zéro se fait comme la discussion de l'équation (17) de la première Partie (1); nous n'insisterons pas davantage et nous nous bornerons à remarquer que cette étude ne nous donne que deux formes de courbes, comme nous l'avons déjà vu pour les branches qui se croisent à l'origine : ce sont celles que présentent les *fig. 7* et 8; elles sont fournies

Fig. 7.

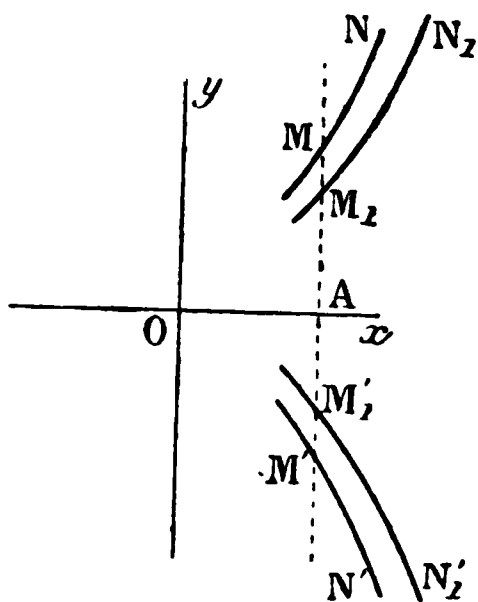
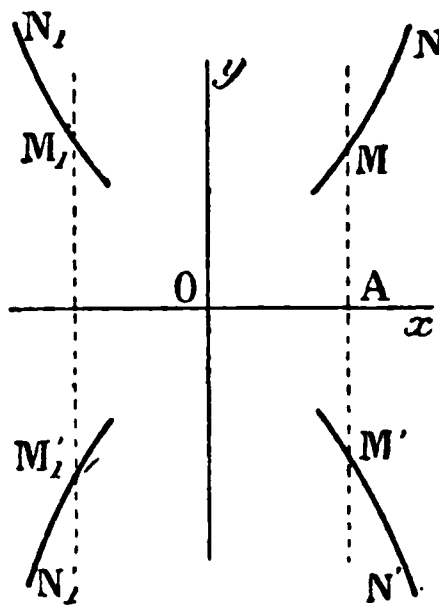


Fig. 8.



les valeurs approchées des racines de l'équation (6),

---

Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XIX (nombre 1880).



prises deux à deux est

$$(m-1)(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^2 - 2m(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots) = k^2.$$

La somme des carrés des distances mutuelles des points de rencontre de la sécante avec la courbe est égale à  $k^2(1 + a^2)$ , c'est-à-dire à

$$a^2) \left[ \frac{(m-1)(b\varphi'_m + \varphi_{m-1})^2}{(\varphi_m)^2} - 2m \frac{\frac{b^2}{2}\varphi''_m + b\varphi'_{m-1} + \varphi_{m-2}}{\varphi_m} \right].$$

Nous allons tirer quelques conséquences de cette formule. Elle montre d'abord que si l'on coupe par une droite une série de courbes dans lesquelles les termes de degré le plus élevé  $m$ , ainsi que les termes de degré  $m-1$  et  $(m-2)$  sont les mêmes, la somme des carrés des distances mutuelles des points où la sécante rencontre chacune des courbes est la même. Cherchons les courbes pour lesquelles la somme des carrés des distances mutuelles des points de rencontre avec une série de sécantes parallèles reste la même; il faudra, dans la formule, annuler le coefficient de  $b^2$  et celui de  $b$ . On a alors les relations

$$\begin{aligned} (m-1)(\varphi'_m)^2 - m\varphi_m\varphi''_m &= 0, \\ (m-1)\varphi'_m\varphi_{m-1} - m\varphi_m\varphi'_{m-1} &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \varphi_m &= (kx + ly)^m, \\ \varphi_{m-1} &= c(kx + ly)^{m-1}. \end{aligned}$$

Par une transformation de coordonnées, on peut ramener l'équation de la courbe à la forme

$$y^m + \varphi_{m-2}(x, y) + \dots = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :









$p', q', p'', q'', p''', q'''$  étant déterminés directement en fonction de  $p$  et  $q$ .

Moyennant des valeurs convenables de  $p$  et  $q$ , l'expression  $p^2 - q^2$  peut représenter tout nombre impair donné; on a donc ce théorème que : *la puissance  $n^{\text{ième}}$  d'un nombre impair quelconque, étant multipliée par 9, est la somme des carrés de trois nombres entiers complexes, que l'on peut déterminer directement.*

En particulier

$$\begin{aligned} 9(2p-1) &= [2p + (p-1)\sqrt{-1}]^2 + 4[p - (p-1)\sqrt{-1}]^2 \\ &\quad + [p + 2(p-1)\sqrt{-1}]^2, \\ 9(2p-1)^2 &= 4[(2p^2 - 2p + 1) + p(p-1)\sqrt{-1}]^2 \\ &\quad + 4[(2p^2 - 2p + 1) - 2p(p-1)\sqrt{-1}]^2 \\ &\quad + [(2p^2 - 2p + 1) + 4p(p-1)\sqrt{-1}]^2. \end{aligned}$$

L'identité

$$\begin{aligned} x &= \left[ \frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{2 \cdot 3} \sqrt{-1} \right]^2 + \left[ \frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{3} \sqrt{-1} \right]^2 \\ &\quad + \left[ \frac{x+1}{2 \cdot 3} + \frac{x-1}{3} \sqrt{-1} \right]^2, \end{aligned}$$

en y désignant par  $x$  un nombre entier quelconque, exprime une proportion plus générale, à savoir que : *tout nombre entier est, par une décomposition directe, la somme des carrés de trois nombres rationnels complexes.*

On peut aussi écrire

$$\begin{aligned} xz &= \left[ \frac{x+z}{3} + \frac{x-z}{2 \cdot 3} \sqrt{-1} \right]^2 + \left[ \frac{x+z}{3} - \frac{x-z}{3} \sqrt{-1} \right]^2 \\ &\quad + \left[ \frac{x+z}{2 \cdot 3} + \frac{x-z}{3} \sqrt{-1} \right]^2. \end{aligned}$$

Nous n'avons pas besoin de rappeler que l'on entend par *nombre rationnel complexe* l'expression  $a + b\sqrt{-1}$ ,















à membre, il nous vient

$$\frac{e^{\frac{g(z-a_{n-1})}{k^2}} + e^{\frac{g(z+a_n)}{k^2}}}{e^{\frac{gz}{k^2}}} = 2 \cos \frac{g\tau}{K}$$

ou

$$e^{-\frac{ga_{n-1}}{k^2}} + e^{\frac{ga_n}{k^2}} = 2 \cos \frac{g\tau}{K}.$$

La valeur du second membre, ne dépendant que de quantités fixes, est constante. De plus, la valeur de cette constante est indépendante de la vitesse initiale  $v_0$ . Le théorème est donc démontré.

Nous mettrons cette constante sous une forme qui se rapprochera plus de celle que nous avons obtenue, dans le cas du mouvement descendant, en remarquant que

$$2 \cos \frac{g\tau}{K} = e^{\frac{g\tau}{K} \sqrt{-1}} + e^{-\frac{g\tau}{K} \sqrt{-1}}.$$

4. *Résumé.* — En définitive, lorsqu'un point pesant se meut verticalement dans un milieu résistant, dans un sens ou dans l'autre, on a

$$e^{-\frac{ga_{n-1}}{k^2}} + e^{\frac{ga_n}{k^2}} = C,$$

la constante C étant indépendante de  $v_0$ .

Posant, d'une manière générale,

$$e^{\frac{ga_i}{k^2}} = E_i,$$

nous écrirons la formule précédente

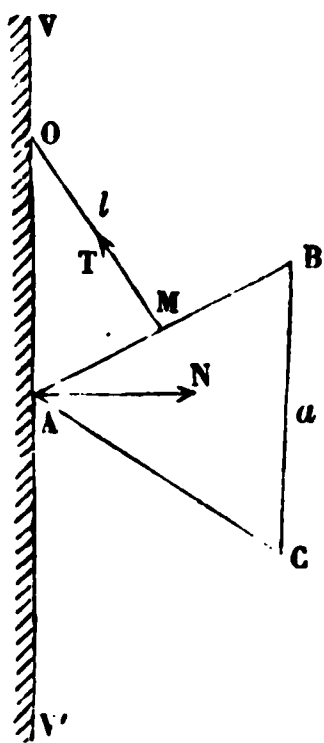
$$\frac{1}{E_{n-1}} + E_n = C.$$

Nous avons donc

$$\frac{1}{E_1} + E_2 = C,$$



pliquée en M au triangle ABC dans la direction de MO  
le sommet A s'appuie sans frottement sur le mur verti

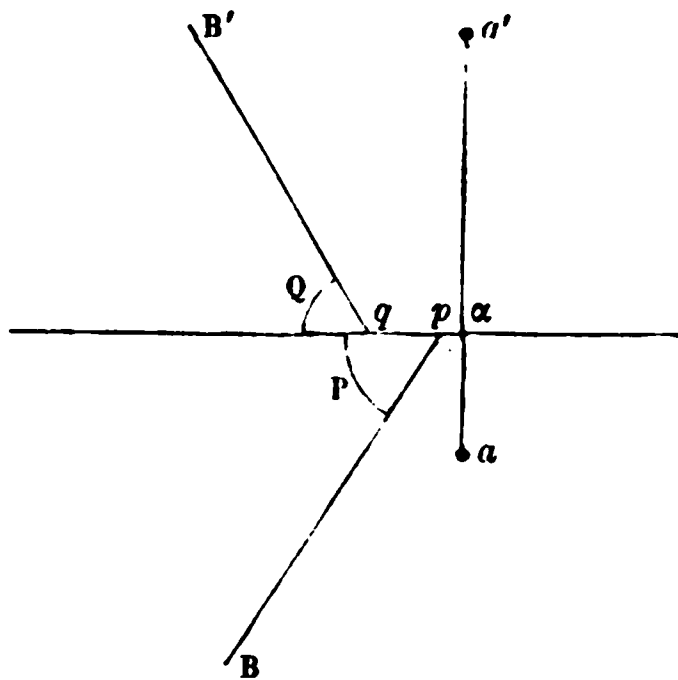


cal VV', c'est-à-dire que la réaction du mur donne lieu à une force normale N, appliquée au sommet A.

On demande de trouver les positions d'équilibre du triangle ABC.

*Tracé graphique.*

Étant donnés un point  $(a, a')$  et une droite  $(B, B')$ ,



dont les positions sont déterminées comme il suit :

$$\alpha a = 0^m, 020, \quad \alpha p = 0^m, 0035, \quad P = 56^\circ, 30,$$

$$\alpha a' = 0^m, 050, \quad \alpha q = 0^m, 0155, \quad Q = 60^\circ,$$

° Mener par le point ( $aa'$ ) une droite ( $XX'$ ) perpendiculaire à la droite ( $BB'$ ) et faisant avec la ligne de terre un angle  $\varphi = 49^\circ$ ;

° Construire la plus courte distance de la droite ( $BB'$ ) et la droite ( $XX'$ );

° Construire sur cette plus courte distance et sur les deux droites ( $BB'$ ), ( $XX'$ ) un parallélépipède rectangle, et les côtés, pris respectivement le long de ( $BB'$ ) et ( $XX'$ ), aient pour longueurs  $0^m, 030$  et  $0^m, 035$ .

*Remarque.* — Le problème admet plusieurs solutions; choisira celle des droites ( $XX'$ ) qui est la moins inclinée sur le plan horizontal, et pour parallélépipède celui qui est le plus en haut et à gauche.

*Proposition d'Arithmétique, d'Algèbre et de calcul de Trigonométrie rectiligne:*

° *Arithmétique.* — Calculer le volume qu'occupent  $2^{\text{fr}}$  en pièces d'argent de  $2^{\text{fr}}$  et de  $1^{\text{fr}}$ , sachant que la valeur de l'argent est 10,47, et que celle du cuivre est 5.

° *Algèbre.* — Étant données l'équation du second degré

$$y^2 + (1 - e^2)x^2 = a^2(1 - e^2)$$

et laquelle  $a$  et  $e$  sont des constantes,  $e$  étant plus petit que 1, et aussi les deux relations

$$x = ae + r \cos V,$$

$$y = r \sin V,$$

et lesquelles  $r$  et  $V$  sont deux nouvelles variables, exprimer le plus simplement possible  $r$  en fonction de  $V$ , et déterminer les valeurs de  $V$  pour lesquelles  $r$  atteint ses valeurs maxima et minima.



V. Aucun produit  $1.3.5.7.9\dots$  de plusieurs impairs consécutifs n'est égal à un nombre entier élevé à une puissance d'un degré supérieur à l'unité.

VI. Trouver deux nombres entiers consécutifs dont la somme ou la différence des cubes soit égale au carré d'un nombre entier.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

### Question 1272

( voir 2<sup>e</sup> série, t. XVII, p. 288. );

PAR UN ANONYME.

*Dans un tétraèdre ABCD dont les faces sont équivalentes :*

1<sup>o</sup> *Les faces sont égales;*

2<sup>o</sup> *Le centre de gravité du tétraèdre coïncide avec les centres des sphères inscrite et circonscrite, et d'une sphère à la fois tangente aux quatre hauteurs du tétraèdre et aux perpendiculaires menées à chaque face par le point de concours de ses hauteurs.*

( COTTEREAU. )

J'établirai d'abord le lemme suivant :

1. Soient  $XY$ ,  $X'Y'$  deux droites, non situées dans un même plan, et  $PP'$  leur perpendiculaire commune (\*). Si l'on prend sur l'une de ces deux droites, par exemple, sur  $XY$ , à partir du point  $P$ , où  $XY$  est rencontrée par  $PP'$ , des distances égales  $PA$ ,  $PB$ , les points  $A$ ,  $B$ , ainsi

(\*) Le lecteur est prié de faire la figure.









d'intersection, on a

$$\begin{aligned} S.ABC &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2) \\ &= \frac{1}{2} [x_1 (mx_2 + \beta) - x_2 (mx_1 + \beta)] = \frac{1}{2} \beta (x_1 - x_2). \end{aligned}$$

$x_1$  et  $x_2$  sont les racines de l'équation

$$(1 + m^2)x^2 - 2(a - m\beta)x + \beta^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a - m\beta \pm \sqrt{a^2 - \beta^2 - 2am\beta}}{1 + m^2}$$

et par suite

$$S = \frac{\beta \sqrt{a^2 - \beta^2 - 2am\beta}}{1 + m^2},$$

en donnant au radical le signe de  $\beta$ .

Égalant à zéro la dérivée par rapport à  $m$ , on a

$$S' = \frac{\beta [3a\beta m^2 - 2(a^2 - \beta^2)m - a\beta]}{(1 + m^2)^2 \sqrt{a^2 - \beta^2 - 2am\beta}} = 0,$$

ou

$$3a\beta m^2 - 2(a^2 - \beta^2)m - a\beta = 0,$$

d'où

$$m = \frac{a^2 - \beta^2 \pm \sqrt{a^4 + a^2\beta^2 + \beta^4}}{3a\beta}.$$

Pour  $m = 0$ , la dérivée étant de signe contraire à  $\beta$ , il faudra prendre le signe inférieur ou le signe supérieur, suivant que  $\beta$  sera positif ou négatif.

En reportant cette valeur de  $m$  dans l'équation de la sécante, on a, en chassant le dénominateur,

$$(x - 3a)\beta^2 + 3a\beta y - a^2 x = \pm x \sqrt{a^4 + a^2\beta^2 + \beta^4}.$$

On aura l'équation de l'enveloppe, en éliminant  $\beta$  entre cette équation et sa dérivée par rapport à  $\beta$ ,

$$2(x - 3a)\beta + 3ay = \frac{\pm x(a^2\beta + 2\beta^3)}{\sqrt{a^4 + a^2\beta^2 + \beta^4}},$$

ce qui conduit à l'équation

$$(3y^2 - x^2 + 2ax)^3(3a - 2x)^2 \\ = y^2(3xy^2 - x^3 - 3ay^2 + 5ax^2 - 6a^2x)^2.$$

La courbe est du huitième degré, symétrique par rapport à l'axe  $Cx$ . L'origine est un point quadruple. Mais il faut remarquer que l'équation représente non seulement l'enveloppe demandée, mais aussi celle de la ligne qui correspond à la valeur de  $m$  qui donnerait pour la surface un minimum algébrique.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Brocard.

### Question 1343

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XVIII, p. 144):

PAR M. MORET-BLANC.

*On donne un triangle ABC et un point P. Soient respectivement  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les points où les côtés du triangle rencontrent les droites PA, PB et PC. On suppose que les droites menées par les points  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  perpendiculairement aux côtés BC, CA et AB se coupent en un même point M. Déterminer : 1<sup>o</sup> le lieu décrit par le point P; 2<sup>o</sup> le lieu décrit par le point M.*

(LAGUERRE.)

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, et soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

les équations des côtés BC, CA, AB; celles des droites PC, PB, PA, qui passent par un même point, seront de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} ax - b\beta = 0, \\ b\beta - c\gamma = 0, \\ c\gamma - ax = 0. \end{cases}$$

L'équation de la perpendiculaire à AB, au point où AB

est rencontré par PC, est de la forme

$$ax - b\beta + n\gamma = 0.$$

La condition pour qu'elle soit perpendiculaire à AB ( $\gamma = 0$ ) est

$$n + b \cos A - a \cos B = 0,$$

d'où

$$n = a \cos B - b \cos A,$$

et l'équation de cette perpendiculaire devient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} ax - b\beta + (a \cos B - b \cos A)\gamma = 0, \\ \text{de même} \\ b\beta - c\gamma + (b \cos C - c \cos B)x = 0, \\ c\gamma - ax + (c \cos A - a \cos C)\beta = 0 \end{array} \right.$$

sont les équations des deux autres perpendiculaires.

La condition pour que ces trois droites concourent en un même point est

$$(3) \quad \left| \begin{array}{ccc} a & -b & a \cos B - b \cos A \\ b \cos C - c \cos B & b & -c \\ -a & c \cos A - a \cos C & c \end{array} \right| = 0.$$

On aura l'équation du lieu du point P en éliminant  $a, b, c$  entre cette équation et les équations (1). Celles-ci peuvent s'écrire

$$\frac{a}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{b}{\frac{1}{\beta}} = \frac{c}{\frac{1}{\gamma}}.$$

Remplaçant, dans le déterminant (3),  $a, b, c$  par les quantités proportionnelles

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma},$$

et chassant les dénominateurs, il vient

$$\left| \begin{array}{ccc} \beta & -\alpha & \beta \cos B - \alpha \cos A \\ \gamma \cos C - \beta \cos B & \gamma & -\beta \\ -\gamma & \alpha \cos A - \gamma \cos C & \alpha \end{array} \right| = 0,$$

ou, en développant et réduisant,

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 \sin^2 A (\beta \cos B - \gamma \cos C) \\ + \beta^2 \sin^2 B (\gamma \cos C - \alpha \cos A) + \gamma^2 \sin^2 C (\alpha \cos A - \beta \cos B) \end{array} \right.$$

Cette équation représente une cubique passant par trois sommets et par le point de concours des hauteurs du triangle ABC, comme on pouvait le prévoir.

On obtiendra l'équation du lieu du point M en éliminant  $a, b, c$  entre les trois équations (2).

Ces équations peuvent s'écrire

$$a(\alpha + \gamma \cos B) = b(\beta + \gamma \cos A),$$

$$b(\beta + \alpha \cos C) = c(\gamma + \alpha \cos B),$$

$$c(\gamma + \beta \cos A) = a(\alpha + \beta \cos C).$$

Multipliant ces équations membre à membre, supprimant le facteur  $abc$  commun aux deux membres et réduisant, il vient

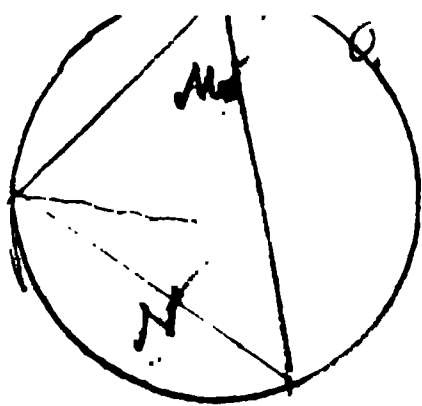
$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 (\beta \cos B - \gamma \cos C) \\ + \beta^2 (\gamma \cos C - \alpha \cos A) + \gamma^2 (\alpha \cos A - \beta \cos B) = 0. \end{array} \right.$$

Le lieu est encore une cubique passant par les trois sommets du triangle et par le point de concours des hauteurs.

On reconnaît *a priori*, et l'on vérifie sur l'équation, que le lieu du point M passe encore par les centres des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits au triangle ABC; les points correspondants du lieu du point P sont le centre de gravité du triangle et les points de concours des trois droites qui joignent chaque sommet au point de contact sur le côté opposé du cercle inscrit, et de chacun des cercles ex-inscrits.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Goffart et Pisani.

---



### Question 1373

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 383);

PAR M. N. GOFFART.

*Si, d'un point O d'une circonférence, on abaisse des perpendiculaires OM, ON à deux côtés d'un triangle inscrit, la projection du troisième côté sur MN sera égale à MN.* (ERNEST CESARO.)

Soient ABC le triangle inscrit, et OM, ON les perpendiculaires abaissées d'un point O de la circonférence sur les côtés AB, AC respectivement (1).

Dans le triangle OMN, on a

$$\frac{MN}{\sin \angle MON} = \frac{OM}{\sin \angle ONM},$$

ou, parce que  $\angle MON = A$ , et  $\angle ONM = \angle OAM$ ,

$$\frac{MN}{\sin A} = \frac{OM}{\sin \angle OAM}.$$

Le triangle OMA étant rectangle en M,

$$\frac{OM}{\sin \angle OAM} = AO;$$

donc

$$\frac{MN}{\sin A} = AO, \quad \text{d'où} \quad MN = AO \sin A.$$

L'angle aigu formé par BC et MN est égal à

$$\angle AMN = \angle AON = \angle B - 90^\circ + A + \angle OAM = 90^\circ - \angle OBA \quad (2):$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure. Les droites BC, MN se rencontrent en un point P qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur BC.

(2) Le quadrilatère OMBP étant inscriptible, l'angle

$$\angle MPB = \angle MOB = 90^\circ - \angle OBA.$$

il s'ensuit que la projection de BC sur MN est égale  $\equiv$   $BC \sin OBA$ . Mais le triangle AOB donne

$$\frac{AO}{\sin OBA} = \frac{AB}{\sin AOB} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A},$$

donc

$$BC \sin OBA = AO \sin A,$$

et par conséquent la projection de BC sur MN est égal à MN.

*Note.* — La même question a été résolue par MM. Leblond et Vielle, élèves au lycée du Havre, et par M. Fauquembergue, qui a aussi résolu la question 1345.

---

### Question 1374

(voir 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 384);

PAR M. N. GOFFART.

*On donne le plan et les trois angles d'un triangle ABC, dont le sommet A est fixe; trouver le lieu géométrique des points de l'espace d'où les trois côtés sont vus sous des angles droits.*

*On suppose que les trois angles donnés sont aigus.*

Considérons l'une des positions ABC du triangle, et soient AA', BB', CC' ses trois hauteurs qui se rencontrent au point O. Conservons les notations habituelles, et désignons par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les longueurs OA, OB, OC.

Par les sommets A, B, C, menons respectivement aux côtés opposés les parallèles B''AC'', A''BC'', B''CA'': on obtient un triangle A''B''C'' semblable à ABC, dans le rapport de similitude 2. Si donc  $d = 2r$  est le diamètre du cercle circonscrit à ABC,  $2d$  est le diamètre du



cercle circonscrit à  $A''B''C''$ . Or, dans le triangle  $OAB''$ , rectangle en  $A$ , on a

$$OA = OB'' \cos B''OA,$$

ou

$$(1) \quad \alpha = d \cos A.$$

On a deux autres relations analogues, en sorte que

$$(2) \quad \frac{\alpha}{\cos A} = \frac{\beta}{\cos B} = \frac{\gamma}{\cos C} = d,$$

relation de même forme que

$$(3) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d,$$

et d'où l'on tire par multiplication

$$(4) \quad \frac{\alpha a}{\sin 2A} = \frac{\beta b}{\sin 2B} = \frac{c \gamma}{\sin 2C} = 2r^2,$$

puis par division

$$(5) \quad \frac{\alpha}{a} \tan A = \frac{\beta}{b} \tan B = \frac{\gamma}{c} \tan C = 1.$$

Décrivons sur les trois côtés du triangle comme diamètre trois sphères, qui seront chacune le lieu d'où l'on voit le côté correspondant sous l'angle droit. Elles se coupent en deux points symétriques par rapport au plan  $ABC$  et qui se projettent en  $O$ . Soit  $M$  l'un de ces points. Deux des sphères se coupent suivant une circonférence dans le plan  $AMA'$ , dont le diamètre est  $AA'$ . Donc

$$OM^2 = OA.OA' = \alpha(h - \alpha) = d \cos A \left( \frac{bc}{d} - d \cos A \right),$$

ou

$$\begin{aligned} OM^2 &= d^2 \cos A (\sin B \sin C - \cos A) \\ &= d^2 \cos A [\sin B \sin C + \cos(B + C)], \end{aligned}$$

ou enfin

$$OM^2 = d^2 \cos A \cos B \cos C \quad (1).$$

Donc, lorsque le triangle tourne autour du point A dans le plan ABC donné, et se déforme en restant semblable à lui-même, le rapport

$$\left( \frac{OM}{OA} \right)^2 = \frac{\cos B \cos C}{\cos A}$$

reste constant.

Le lieu des points M est donc un cône de révolution autour de la perpendiculaire en A au plan ABC, et la tangente du demi-angle au sommet est

$$\sqrt{\frac{\cos A}{\cos B \cos C}}.$$

Il résulte de là que le cône n'existe que si chacun des cosinus est positif, c'est-à-dire que si les trois angles donnés sont aigus.

*Note.* — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc

## QUESTIONS.

1377. Trouver les valeurs des intégrales

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 1} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

et

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - 1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 - x - 2}}.$$

(S. REALIS.)

(<sup>1</sup>) On abrégerait ce calcul en observant que le triangle rectangle BOA' donne

$$OA' = OB \cos C = d \cos B \cos C, \quad \text{d'où} \quad OA \cdot OA' = d^2 \cos A \cos B \cos C. \quad (G.)$$

## 1378. L'équation

$$x^4 + 12\alpha\beta(x + \beta)x + 2\alpha\beta(4x^2 - 9\alpha\beta + 4\beta^2) = 0,$$

dans laquelle  $\alpha$  et  $\beta$  sont des entiers différents de zéro, n'a pas de racine entière. (S. REALIS.)

1379. Les trois côtés  $a, b, c$  d'un triangle sont exprimés par des nombres entiers en progression arithmétique; et si l'on ajoute successivement 50 et 60 à chacun de ces côtés, le rayon du cercle inscrit augmente, respectivement, de 17 et de 20 : trouver les valeurs des côtés de ce triangle. (W.-A. WHITWORTH, M. A.)

(Extrait du journal : *The educational times*.)

1380. Si, par les points de contact d'une tangente commune à deux circonférences qui se coupent, et par un de leurs points d'intersection, on fait passer une circonférence, son rayon sera moyen géométrique entre les rayons des deux premiers cercles.

(DOMENICO MONTESANO.)

1381. On donne une circonférence et deux points A, B, extérieurs à cette courbe. Par le point B, on mène une corde quelconque MN, et du point A les droites AM, AN, qui coupent respectivement la circonférence en P et Q; démontrer que :

1° La droite PQ rencontre AB en un point qui reste fixe, lorsque la sécante BMN tourne autour du point B;

2° Le lieu géométrique du point d'intersection des perpendiculaires menées aux droites AM, AN aux points M, N est une droite perpendiculaire à AB.

(DOMENICO MONTESANO.)

## RECTIFICATIONS.

1. Une erreur s'est glissée dans l'énoncé de la question 1364; voici comment il faut le rétablir :

1° Les équations réciproques telles que, en posant  $x + \frac{1}{x} = 2t$ , leurs transformées soient également réciproques, peuvent se mettre sous la forme

$$F[(x+1)^4, (x-1)^4] = 0,$$

F désignant une fonction entière et homogène de  $(x+1)^4$  et  $(x-1)^4$ .

On suppose que l'équation proposée n'admet pas pour racine  $+1$ , ou  $-1$ .

2° Les équations réciproques telles que, en posant  $x + \frac{i}{x} = t$ , leurs transformées soient également réciproques, peuvent se mettre sous la forme

$$(x^2 + x + 1)^n (x^2 - x + 1)^{n'} F[(x^2 + x + 1)^2, (x^2 - x + 1)^2] = 0,$$

F désignant une fonction entière et homogène des quantités

$$(x^2 + x + 1)^2, (x^2 - x + 1)^2. \quad \text{PELLET.}$$

Les deux propositions comprises dans ce nouvel énoncé ont été démontrées dans le *Bulletin mensuel de l'Académie de Clermont* (mars 1881), par M. Paut, boursier d'agrégation.

2. Question 1376, page 480 :

$$\text{au lieu de } \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{5C^2 + 3R^2}{3C^2 + R^2}, \text{ lisez } \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{C^2 + 3R^2}{3C^2 + R^2}.$$

La question 1376 se trouve dans les *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire* de M. Catalan (6<sup>e</sup> édition, p. 447).

La limite de la somme des volumes des sphères inscrites au cône qui a été déterminée par M. Catalan, conduit immédiatement, pour l'espace laissé vide dans le cône, à l'expression  $\frac{1}{3} \pi R^2 \frac{C^2 + 3R^2}{3C^2 + R^2}$ , indiquée par M. Dostor.

# SUR LA DÉTERMINATION DE QUELQUES INTÉGRALES INDÉFINIES;

PAR M. H. RESAL.

1. La racine carrée d'un trinôme du second degré peut toujours se mettre sous l'une des trois formes suivantes :

$$\sqrt{1+x^2}, \quad \sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{x^2-1}.$$

Cela posé, désignons par  $f(x)$  une fonction quelconque de  $x$ .

2. Soient

$$X = \int f(x) \sqrt{1+x^2} \, dx, \quad X_1 = \int \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \, dx.$$

On a, en ayant recours à la méthode d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{f(x) \, dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2 f(x) \, dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= X_1 + \frac{1}{2} \int \frac{x f(x) \, dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = X_1 + \int x f(x) \, d\sqrt{1+x^2}, \\ &= X_1 + x f(x) \sqrt{1+x^2} - \int [f(x) + x f'(x)] \sqrt{1+x^2} \, dx; \end{aligned}$$

d'où

$$(1) \quad 2X = X_1 + x f(x) \sqrt{1+x^2} - \int x f'(x) \sqrt{1+x^2} \, dx.$$

Si nous posons

$$(2) \quad x f'(x) = \varphi'(x),$$

cette équation donne, en intégrant encore une fois par parties,

$$2X = X_1 + [x f(x) - \varphi(x)] \sqrt{1+x^2} + \int \frac{x \varphi(x) \, dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On voit ainsi que  $X$  dépend de l'intégrale  $X_1$ , et d'une seconde intégrale de même nature que la précédente.

*Exemples :*

1<sup>o</sup>  $f(x) = 1$ . L'équation (1) donne (1)

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + x \sqrt{1+x^2} \\ &= \log [x + \sqrt{1+x^2}] + x \sqrt{1+x^2}. \end{aligned} \right.$$

Cette méthode est plus expéditive que celles auxquelles on a généralement recours, puisqu'elle ne fait dépendre l'intégrale  $X$  que d'une autre dont on trouve facilement l'expression.

2<sup>o</sup>  $f(x) = x$ , pour mémoire, car on voit immédiatement que

$$(5) \quad 2 \int x \sqrt{1+x^2} dx = \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}.$$

3<sup>o</sup>  $f(x) = \frac{1}{x}$ . De l'équation (1) on déduit

$$(a) \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}.$$

En posant

$$\sqrt{1+x^2} = u,$$

(1) En posant  $x = \tan \theta$ , on a

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{d\theta}{\cos \theta} = 2 \int \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \int \frac{\alpha \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \log \frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} = \log \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \log \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \log (\sqrt{1+x^2} + x). \end{aligned}$$

on trouve successivement

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2\sqrt{1+x^2}} \\ &= \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2} \log \frac{u-1}{u+1} = \log \left( \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

4°  $f(x) = x^m$ , en désignant par  $m$  un nombre quelconque.

On a, d'après la formule (1),

$$\begin{aligned} 2 \int x^m \sqrt{1+x^2} dx &= \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &+ x^{m+1} \sqrt{1+x^2} - m \int x^m \sqrt{1+x^2} dx, \end{aligned}$$

d'où

$$(2+m) \int x^m \sqrt{1+x^2} = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} + x^{m+1} \sqrt{1+x^2}.$$

Mais on a

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{x^{m-1} dx^2}{\sqrt{1+x^2}} = \int x^{m-1} d\sqrt{1+x^2},$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}} = x^{m-1} \sqrt{1+x^2} - (m-1) \int x^{m-2} \sqrt{1+x^2} dx.$$

L'équation (3) devient aussi

$$(8) \left\{ \begin{aligned} (2+m) \int x^m \sqrt{1+x^2} dx \\ = x^{m-1} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (m-1) \int x^{m-2} \sqrt{1+x^2} dx. \end{aligned} \right.$$

Supposons que  $m$  soit un nombre pair positif; on voit, d'après cette formule, que l'on fera dépendre

$$\begin{aligned} \int x^m \sqrt{1+x^2} dx &\text{ de } \int x^{m-2} \sqrt{1+x^2} dx, \\ \int x^{m-2} \sqrt{1+x^2} dx &\text{ de } \int x^{m-4} \sqrt{1+x^2} dx, \\ &\dots\dots\dots, \\ \int x^2 \sqrt{1+x^2} dx &\text{ de } \int \sqrt{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Or, comme nous savons déterminer la dernière de ces intégrales, on trouvera sans difficulté l'expression de la première.

Si  $m$  est positif et impair, on voit, en opérant comme ci-dessus, que l'intégrale du premier membre de l'équation (8) ne dépendra finalement que de la suivante

$$\int x \sqrt{1+x^2} dx,$$

dont l'expression est connue.

Supposons maintenant que  $m$  soit un nombre entier négatif et posons  $m-2=-n$ ; la formule (8) donne

$$\begin{aligned} (n-1) \int x^{-n} \sqrt{1+x^2} dx \\ = -x^{-n+1} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + (4-n) \int x^{(n-2)} \sqrt{1+x^2} dx; \end{aligned}$$

et l'on voit que, selon que  $n$  sera pair ou impair, on sera conduit finalement à

$$\int \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{ou} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx,$$

intégrales que nous savons déterminer.

D'après ce qui précède, on voit que, si  $m$  est un nombre entier positif ou négatif, l'intégrale du premier membre de l'équation (7) s'obtiendra sans difficulté

3. Soient

$$X = \int f(x) \sqrt{1-x^2} dx, \quad X_1 = \int \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

On a

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int x^2 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = X_1 + \int x f(x) dx \\ &= X_1 + x f(x) \sqrt{1-x^2} - \int [f(x) + x f'(x)] \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

d'où

$$(9) \quad 2X = X_1 + x f(x) \sqrt{1-x^2} - \int x f'(x) \sqrt{1-x^2} dx$$



équation identique à l'équation (1), à la condition de remplacer, sous le radical, dans cette dernière,  $+x^2$  par  $-x^2$ .

*Exemples :*

1°  $f(x) = 1$ . La formule (9) donne

$$(10) \quad 2 \int \sqrt{1-x^2} dx = \arcsin x + x \sqrt{1-x^2}.$$

2°  $f(x) = x$  (pour mémoire). On a

$$) \quad 2 \int x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

3°  $f(x) = \frac{1}{x}$ . On a, d'après la formule (9),

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx = \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}.$$

Si nous posons

$$\sqrt{1-x^2} = u,$$

nous aurons

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \\ &= -\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \log \frac{(1-u)}{1+u} = \log \left( \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

par suite

$$(13) \quad \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx = \log \left( \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1-x^2}.$$

4°  $f(x) = x^m$ . Lorsque  $m$  est un nombre entier positif et négatif, le mode de réduction des intégrales indiqué à la fin du numéro précédent est applicable ici, et nous n'avons pas à insister sur ce point.

4. Soit

$$X = \int f(x) \sqrt{x^2 - 1} dx, \quad X_1 = \int \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} X &= - \int \frac{f(x) dx}{\sqrt{x^2 - 1}} + \int \frac{x^2 f(x) dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = -X_1 + \int x f(x) dx \\ &= -X_1 + x f(x) \sqrt{x^2 - 1} - \int [f(x) + x f'(x)] \sqrt{x^2 - 1} dx. \end{aligned}$$

d'où

$$(13) \quad 2X = -X_1 + x f(x) \sqrt{x^2 - 1} - \int x f(x) \sqrt{x^2 - 1} dx.$$

*Exemples :*

1°  $f(x) = 1$ . L'équation (13) donne

$$(14) \quad \begin{cases} 2 \int \sqrt{x^2 - 1} dx = - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ \quad + x \sqrt{x^2 - 1} = - \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) + x \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$$

2°  $f(x) = x$  (pour mémoire). On a

$$(15) \quad 2 \int x \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^2 - 1}, \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x^2 - 1}$$

3°  $f(x) = \frac{1}{x}$ . La formule (13) donne

$$2 \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = - \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 1} + \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx$$


---

(1) En posant  $x = \frac{1}{\sin \theta}$ , on a

$$\begin{aligned} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \int \frac{dx}{\sin \theta} = \int \frac{d\frac{\theta}{2}}{\frac{\cos^2 \theta}{\tan \frac{\theta}{2}}} \\ &= \log \tan \frac{\theta}{2} = \log \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} = \log(x - 1) \end{aligned}$$

d'où

$$(7) \quad \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = - \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1}.$$

En posant  $x = \frac{1}{\sin \theta}$ , on reconnaît facilement que l'intégrale du second membre de cette équation, prise avec son signe, a pour valeur  $\theta$ . On a donc

$$(16) \quad \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \arcsin \frac{1}{x} + \sqrt{x^2-1}.$$

4° L'intégrale

$$\int x^m \sqrt{x^2-1} dx,$$

dans laquelle  $m$  est un nombre entier positif ou négatif, se réduira en suivant la marche indiquée à la fin du n° 2.

5. Nous allons maintenant chercher à exprimer, au moyen de transcendentes connues, les intégrales des racines carrées des fonctions trigonométriques. Il est évident que, dans tous les cas, on est ramené à considérer les trois intégrales suivantes :

$$\int \sqrt{\sin x} dx, \quad \int \sqrt{\frac{1}{\sin x}} dx, \quad \int \sqrt{\tan x} dx,$$

les deux premières supposant des limites comprises entre zéro et  $\pi$ , et la troisième entre zéro et  $\frac{\pi}{2}$ .

6. Si nous posons  $\sin x = \cos^2 \theta$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} dx &= -2 \int \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^4 \theta}} = -2 \int \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} \\ &= 2 \left( - \int \sqrt{1 + \cos^2 \theta} d\theta + \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}} \right), \end{aligned}$$

et enfin

$$) \quad \int \sqrt{\sin x} dx = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}} - \sqrt{2} \int \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta} d\theta \right).$$

On est ainsi ramené à deux intégrales elliptiques qui

sont respectivement de la première et de la seconde espèce.

7. En continuant à poser  $\sin x = \cos^2 \theta$ , nous avons

$$\int \sqrt{\frac{1}{\sin x}} dx = -2 \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^4 \theta}} = -2 \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}},$$

ou

$$(18) \quad \int \sqrt{\frac{1}{\sin x}} dx = -\sqrt{2} \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}},$$

ce qui est une intégrale elliptique de la première espèce.

En retranchant l'une de l'autre les équations (17) et (18), on trouve

$$(19) \quad \int \frac{1 - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx = 2^{\frac{3}{2}} \int \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta} d\theta.$$

8. Considérons maintenant l'intégrale

$$X = \int \sqrt{\tan x} dx.$$

En posant

$$\tan x = \tan^2 \theta,$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned} X &= 2 \int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta} = 2 \int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{1 - \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta} + \int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{1 + \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{1 - \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta} + \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{1 + \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2\theta d\theta}{1 - \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2} \int \frac{\cos 2\theta d\theta}{1 + \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d \tan \theta}{\left( \tan \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d \tan \theta}{\left( \tan \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \log \frac{1 - \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

enfin

$$\begin{aligned}
 (O) \quad \int \sqrt{\tan x} \, dx = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \arctan(\sqrt{2} \tan \theta - 1) \right. \\
 & + \arctan(\sqrt{2} \tan \theta + 1) \\
 & \left. + \log \left( \frac{\sqrt{2} - \sin 2\theta}{\sqrt{2} + \sin 2\theta} \right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \right].
 \end{aligned}$$


---

## THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DANS LES COURBES ALGÈBRIQUES (1);

PAR M. CH. BIEHLER.

---

### II.

6. Désignons par  $a$  le coefficient angulaire de la direction considérée et soit  $y = ax + \frac{1}{\lambda}$  une parallèle à cette direction; formons le faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de rencontre de cette droite avec la courbe; il suffira, pour obtenir l'équation du faisceau, d'éliminer  $z$  entre les équations

$$\begin{cases} f_m(x, y) + z f_{m-1}(x, y) + \dots \\ \quad + z^{m-1} f_1(x, y) + z^m f_0 = 0, \end{cases}$$

$$\lambda(y - ax) = z;$$

on obtient ainsi l'équation

$$\begin{aligned}
 & f_m(x, y) + \lambda(y - ax) f_{m-1}(x, y) \\
 & + \lambda^2(y - ax)^2 f_{m-2}(x, y) + \dots + \lambda^m(y - ax)^m f_0 = 0
 \end{aligned}$$


---

(1) Voir même Tome, p. 97 et 489.

$$\left( \begin{aligned} & f_m \left( 1, \frac{y}{x} \right) + \lambda \left( \frac{y}{x} - a \right) f_{m-1} \left( 1, \frac{y}{x} \right) \\ & + \lambda^2 \left( \frac{y}{x} - a \right)^2 f_{m-2} \left( 1, \frac{y}{x} \right) + \dots + \lambda^m \left( \frac{y}{x} - a \right)^m f_0 = 0; \end{aligned} \right.$$

et si l'on pose

$$f_\mu \left( 1, \frac{y}{x} \right) = \varphi_\mu \left( \frac{y}{x} \right),$$

$$\frac{y}{x} - a = t,$$

l'équation (3) prendra la forme

$$(4) \quad \varphi_m(a+t) + \lambda t \varphi_{m-1}(a+t) + \lambda^2 t^2 \varphi_{m-2}(a+t) + \dots + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0$$

ou bien

$$(5) \quad \left( \begin{aligned} & \varphi_m(a) + t \varphi'_m(a) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \varphi''_m(a) + \dots + \frac{t^m}{m!} \varphi^{(m)}_m(a) \\ & + \lambda t \left[ \varphi_{m-1}(a) + t \varphi'_{m-1}(a) + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}_{m-1}(a) \right] \\ & + \lambda^{m-1} t^{m-1} [\varphi_1(a) + t \varphi'_1(a)] + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (5) du paragraphe précédent, où l'on a supposé que la direction des points à l'infini est celle de l'axe des  $y$ ; elle n'en diffère qu'en ce que les quantités  $\varphi^{(p)}_\mu(0)$  sont remplacées dans la première par les quantités correspondantes  $\varphi^{(p)}_\mu(a)$ .

La discussion de cette nouvelle équation (5) est donc identique à celle que nous avons déjà faite, et les figures nouvelles ne diffèrent de celles qui ont été précédemment obtenues qu'en ce qu'elles présentent, par rapport à la droite  $y = ax$ , la disposition que les premières présentent par rapport à l'axe des  $y$ ; il est donc superflu d'y revenir.

7. Nous allons, en terminant, faire une remarque sur

les valeurs approchées des racines qui nous ont permis de construire les branches paraboliques. La première de ces valeurs est fournie par la formule (8), savoir

$$t = - \frac{\varphi_{m-1}(0)}{\frac{1}{1.2} \varphi_m''(0)} \times \lambda,$$

ou

$$\frac{t}{1.2} \varphi_m''(0) + \lambda \varphi_{m-1}(0) = 0;$$

dans cette formule

$$t = \frac{x}{y}, \quad \lambda = \frac{1}{x};$$

en substituant ces valeurs, il vient

$$(a) \quad \frac{x^2}{12} \varphi_m''(0) + y \varphi_{m-1}(0) = 0.$$

La formule (8) représente dans un système particulier de coordonnées une parabole du second degré, car la formule (a) représente la même courbe en coordonnées cartésiennes; remarquons encore que le groupe de termes

$$\frac{x^2}{12} \varphi_m''(0) + y \varphi_{m-1}(0)$$

existe dans l'équation de la courbe proposée, car

$$f_m(x, y) = y^m f_m\left(\frac{x}{y}, 1\right) = y^m \varphi_m\left(\frac{x}{y}\right);$$

or

$$y^m \varphi_m\left(\frac{x}{y}\right) = y^m \left[ \varphi_m(0) + \frac{x}{y} \varphi_m'(0) + \frac{x^2}{y^2} \frac{\varphi_m''(0)}{1.2} + \dots \right];$$

par suite,

$$\begin{aligned} f_m(x, y) &= y^m \varphi_m(0) + y^{m-1} x \varphi_m'(0) \\ &\quad + y^{m-2} x^2 \frac{\varphi_m''(0)}{1.2} + \dots + \frac{x^m \varphi^{(m)}(0)}{m!}; \end{aligned}$$

les quantités

$$\varphi_m(0) \varphi'_m(0) \dots \varphi_m^{(m)}(0)$$

sont donc les coefficients de la fonction homogène de degré  $m$ ,  $f_m(x, y)$ .

On a de même

$$f_{m-1}(x, y) = y^{m-1} \varphi_{m-1}(0) + y^{m-2} x \varphi_{m-1}'(0) + \dots + x^{m-1} \varphi_{m-1}^{(m-1)}(0);$$

par suite, ce sont les deux termes

$$y^{m-2} x^2 \frac{\varphi_m''(0)}{1 \cdot 2} + y^{m-1} \varphi_{m-1}(0)$$

qui fournissent, quand on égale leur somme à zéro, l'équation de la parabole du second degré que l'on peut considérer comme asymptotique de la courbe dans la direction de l'axe des  $y$ ; ce sont donc les deux seuls termes précédents qui déterminent la forme de la courbe à l'infini dans la direction considérée.

Les autres valeurs approchées des racines donnent lieu à des remarques semblables. Dans la *fig. 2*, les points à l'infini dans la direction de l'axe des  $y$  sont fournis par la parabole [voir la formule (9)]

$$(b) \quad \frac{x^q}{q!} \varphi_m^{(q)}(0) + y^{q-1} \varphi_{m-1}(0) = 0$$

obtenue au moyen des termes

$$y^{m-q} x^q \frac{\varphi_m^{(q)}(0)}{q!} + y^{m-1} \varphi_{m-1}(0)$$

de l'équation proposée.

Dans la *fig. 3*, c'est la parabole

$$(c) \quad x^3 \frac{\varphi_m'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + y \varphi_{m-2}(0) = 0$$

qui nous donne la formule de la courbe; elle est obtenue



en prenant dans l'équation de la courbe les termes

$$y^{m-3} x^3 \frac{\varphi_m'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + y^{m-2} \varphi_{m-2}(0).$$

Les *fig. 4* et *5* sont fournies par les paraboles

$$x^2 = \tau_0 \times y \quad x^2 = \tau_1 \times y,$$

dont l'équation

$$(x^2 - \tau_0 \times y)(x^2 - \tau_1 y) = 0$$

est donnée par le groupe

$$y^{m-4} x^4 \frac{\varphi_m^{(4)}(0)}{4!} + y^{m-3} x^2 \frac{\varphi_{m-1}''(0)}{1 \cdot 2} + y^{m-2} \varphi_{m-2}(0),$$

qui figure dans l'équation proposée, et ainsi des autres.

La méthode que nous avons développée a donc pour effet de nous donner le groupe des termes de l'équation proposée, qui déterminent la forme de la courbe à l'infini, quand il existe des branches paraboliques dans la direction de l'axe des  $y$ .

Quand la direction est autre que celle de l'un des axes de coordonnées, c'est à l'équation (5) du § II qu'il faut appliquer ce que nous venons de dire de l'équation de la courbe, après avoir substitué toutefois aux variables  $t$  et  $\lambda$ , qui y figurent, leurs valeurs en  $x$  et  $y$  données par les formules

$$\frac{y}{x} - a = t, \quad \lambda(y - ax) = 1.$$

Ce que nous venons de dire des branches paraboliques s'applique également aux branches hyperboliques qui accompagnent les asymptotes, et aux branches de courbes qui se croisent en un point situé à distance finie, dont la construction a été étudiée dans la première Partie.

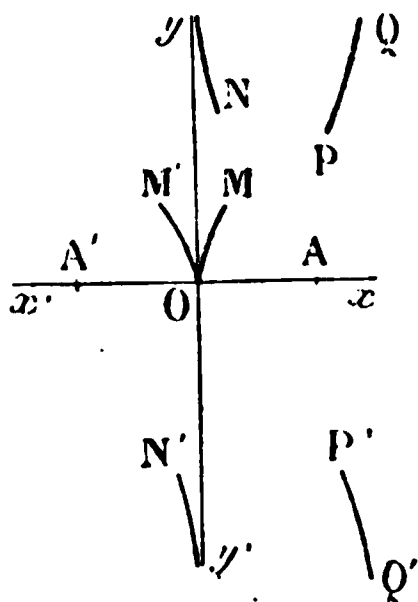
*On peut donc dire, d'une manière générale, que la*



car le terme  $\lambda^6 \gamma^4$  est infiniment petit devant chacun des terme  $6\gamma$  et  $-\lambda^2$  et le terme  $-5\lambda\gamma^3$  est infiniment petit devant  $6\gamma$ .

Pour des valeurs positives et négatives de  $\lambda$ ,  $\gamma$  est po-

Fig. 9.



sitif, par suite la courbe affecte autour de l'origine la forme de MOM' (fig. 9).

$$6\gamma - \lambda^2 = 0$$

est l'équation de la courbe auxiliaire, qui devient en coordonnées rectilignes

$$6\gamma^3 - x^2 = 0.$$

On voit qu'elle est formée en égalant à zéro le groupe des termes  $6\gamma^3 - x^2$  de l'équation proposée.

2° Construisons en second lieu la courbe autour de ses asymptotes. Il n'y a qu'une seule direction asymptotique, qui est celle de l'axe des  $\gamma$ ; l'équation de la courbe pouvant s'écrire

$$-5x\gamma^4 + 6\gamma^3 + x^6 - x^2 = 0,$$

On voit que l'axe des  $\gamma$  est asymptote. Coupons la courbe par des parallèles à l'asymptote, à savoir par  $x = \epsilon$ , et

posons  $y = \frac{1}{z}$ , il viendra

$$-5\varepsilon + 6z + z^4(\varepsilon^6 - \varepsilon^2) = 0;$$

cette équation, pour de petites valeurs de  $z$  et de  $\varepsilon$ , se réduit évidemment à

$$-5\varepsilon + 6z = 0.$$

Pour des valeurs positives de  $\varepsilon$ ,  $z$  et par suite  $y$  sont positifs; pour des valeurs négatives de  $\varepsilon$ ,  $y$  est négatif; on obtient donc les branches  $yN$ ,  $y'N'$  (*fig. 9*). L'équation

$$-5\varepsilon + 6z = 0$$

est celle de la courbe auxiliaire; en remplaçant  $\varepsilon$  et  $z$  par leur valeur

$$x = \varepsilon, \quad z = \frac{1}{y},$$

elle devient

$$-5xy + 6 = 0;$$

c'est l'équation d'une hyperbole : on l'obtient en égalant à zéro le groupe des termes  $-5xy^4 + 6y^3$  de l'équation proposée.

3° Cherchons maintenant les branches paraboliques dans la direction de l'axe des  $y$ . Coupons la courbe par la droite  $x = \frac{1}{\lambda}$  et formons l'équation du faisceau des rayons qui joignent l'origine aux points de rencontre de la droite et de la courbe; il faut pour cela éliminer  $z$  entre les équations

$$x^6 - 5zx^4y^4 + 6z^3y^3 - z^4x^2 = 0,$$

$$x = \frac{z}{\lambda},$$

ce qui donne

$$x^6 - 5\lambda x^2y^4 + 6\lambda^3x^3y^3 - \lambda^4x^6 = 0.$$

Posons maintenant  $x = ty$ ; cette équation deviendra une équation entre  $t$  et  $\lambda$ , savoir :

$$t^6 - 5\lambda t^2 + 6\lambda^3 t^3 - \lambda^4 t^6 = 0,$$

qui, pour de petites valeurs de  $t$  et de  $\lambda$ , se réduit à

$$t^6 - 5\lambda t^2 = 0,$$

$$t^4 - 5\lambda = 0.$$

$\lambda$  ne peut recevoir que des valeurs positives pour que  $t$  soit réel, et à chaque valeur de  $\lambda$  correspondent deux valeurs de  $t$  de signes contraires; on obtient ainsi les branches PQ, P'Q' (*fig. 9*). L'équation  $t^4 - 5\lambda = 0$  représente l'équation de la parabole auxiliaire; elle devient en coordonnées rectilignes

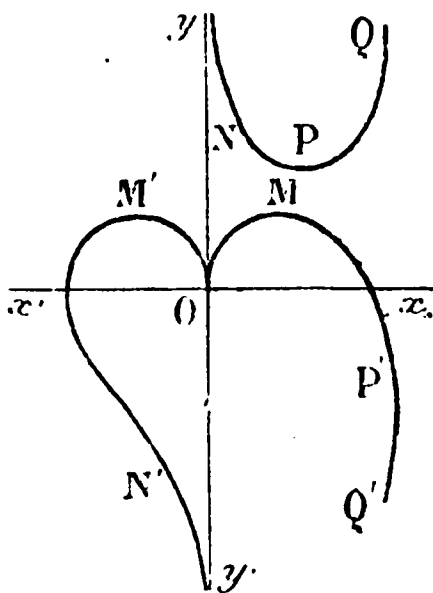
$$x^5 - 5y^4 = 0,$$

et se tire de l'équation proposée en égalant à zéro le groupe formé par ses deux premiers termes

$$x^6 - 5xy^4.$$

Si l'on remarque que la courbe rencontre l'axe des  $x$  aux points  $x = \pm 1$ , et qu'elle ne rencontre l'axe des  $y$

Fig. 10.



Qu'à l'origine et à l'infini; que si de plus on coupe la courbe par la droite  $x = \lambda$  et si l'on remarque que l'é-



l'existence et la détermination exacte des non-solutions que l'on rencontre dans l'application des règles les plus élémentaires relatives à la théorie de l'élimination; j'indiquerai en outre un moyen, non encore remarqué, d'obtenir, en même temps que l'équation du lieu, les coordonnées des points multiples de ce lieu.

## II. — PREMIER PROBLÈME.

PROBLÈME. — *Éliminer  $\alpha$  entre les équations*

$$(a) \quad \begin{cases} A(x, y, \alpha) = 0, & (1) \\ B(x, y, \alpha) = 0, & (2) \end{cases}$$

*supposées respectivement d'ordres  $m, n$  par rapport à ce paramètre, et déterminer les points multiples du lieu défini par ces mêmes équations.*

*Solution.* — Ordonnons ces équations par rapport au paramètre  $\alpha$ ; on aura

$$(a') \quad \begin{cases} A = A_1(x, y)\alpha^m + A_2(x, y)\alpha^{m-1} \\ \quad + A_3(x, y)\alpha^{m-2} + A_4(x, y)\alpha^{m-3} + \dots = 0, & (3) \\ B = B_1(x, y)\alpha^n + B_2(x, y)\alpha^{n-1} \\ \quad + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \dots = 0. & (4) \end{cases}$$

Supposons d'abord que les exposants  $m$  et  $n$  soient inégaux; supposons, par exemple, que

$$m = n + 3; \quad (5)$$

le système  $(a')$  pourra s'écrire

$$\left. \begin{aligned} A &= A_1(x, y)\alpha^n\alpha^3 + A_2(x, y)\alpha^{n+2} + A_3(x, y)\alpha^{n+1} \\ &\quad + A_4(x, y)\alpha^n + \dots = 0, \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha^n &= \frac{[B_2(x, y)\alpha^{n-1} + B_3(x, y)\alpha^{n-2} + B_4(x, y)\alpha^{n-3} + \dots]}{B_1(x, y)}. \end{aligned} \right\} (7)$$

Substituons à la relation (6) la relation obtenue en

remplaçant, dans le premier terme de cette équation,  $x^n$  par sa valeur  $\gamma$  : on aura, après avoir chassé les dénominateurs, un système de la forme

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} C = C_1(x, y)x^n x^2 + C_2(x, y)x^{n-1} + C_3(x, y)x^2 \\ \quad + C_4(x, y)x^{n-1} + \dots = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^n = \frac{[B_2(x, y)x^{n-1} + B_3(x, y)x^{n-2} + B_4(x, y)x^{n-3} + \dots]}{B_1(x, y)}, \end{array} \right. \quad (9)$$

qui se composera évidemment du système  $(a'')$  plus du système *étranger* défini par

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} B_2(x, y)x^{n-1} + B_3(x, y)x^{n-2} \\ \quad + B_4(x, y)x^{n-3} + \dots = 0, \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(x, y) = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

en sorte que  $(b)$  représentera non seulement le lieu proposé  $(a)$ , mais encore la courbe étrangère, comptée, en général,  $n - 1$  fois  $(^1)$ , ayant pour équation

$$B_1(x, y) = 0 \quad (^2). \quad (12)$$

Cette introduction d'une courbe étrangère rend le système  $(b)$  plus facile à résoudre que le système  $(a'')$ , puisque l'équation (6) se trouve remplacée par l'équation (8), qui est de degré moindre d'une unité par rapport au paramètre à éliminer  $\alpha$ .

Substituons encore à l'équation (8) l'équation obtenue en remplaçant, dans le premier terme de cette

(<sup>1</sup>) Il correspond, en effet, si le terme  $B_1(x, y)$  n'est pas nul,  $n - 1$  valeurs du paramètre  $\alpha$  pour chaque point  $(x, y)$  de cette courbe. — Voir la Note sur les points multiples qui termine le présent paragraphe.

(<sup>2</sup>) Il est très important d'observer que, dans le cas particulier où l'on a  $A_1(x, y) = B_1(x, y)$ , on n'introduit pas de lieu étranger si l'on a soin, après la substitution de (9) dans le premier terme de (8), de diviser par  $B_1(x, y)$  le numérateur et le dénominateur du coefficient du premier terme. On n'introduit pas non plus de lieu étranger



lation,  $\alpha^n$  par sa valeur (9); on aura, après avoir chassé les dénominateurs, un système de la forme

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} D = D_1(x, y) \alpha^n + D_2(x, y) \alpha^{n-1} + D_3(x, y) \alpha^{n-2} + \dots = 0, \\ \alpha^n = \frac{-[D_2(x, y) \alpha^{n-1} + D_3(x, y) \alpha^{n-2} + D_4(x, y) \alpha^{n-3} + \dots]}{D_1(x, y)}, \end{array} \right. \quad (13)$$

$$(14)$$

qui se composera du système (b) plus du système étranger défini par (c).

Substituant enfin à l'équation (13) l'équation obtenue en remplaçant, dans le premier terme de cette relation,  $\alpha^n$  par sa valeur (14), on aura, après avoir chassé les dénominateurs, un système de la forme

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} E = E_1(x, y) \alpha^n + E_2(x, y) \alpha^{n-1} + E_3(x, y) \alpha^{n-2} + E_4(x, y) \alpha^{n-3} + \dots = 0, \\ B = B_1(x, y) \alpha^n + B_2(x, y) \alpha^{n-1} + B_3(x, y) \alpha^{n-2} + B_4(x, y) \alpha^{n-3} + \dots = 0, \end{array} \right. \quad (15)$$

$$(16)$$

qui se composera du système (d) plus du système étranger défini par (c).

Les trois substitutions des systèmes (b), (d), (e) au système (a') suffisent évidemment pour établir ce théorème :

**THÉORÈME I.** — *Quels que soient les exposants  $m$  et  $n$  du paramètre  $\alpha$ , on peut toujours, sauf à introduire des solutions étrangères parfaitement définies, substituer au système (a') un système de la forme (e) dans lequel les plus hauts exposants de  $\alpha$  sont égaux dans les deux équations.*

Cela fait, l'équation (16) pouvant s'écrire sous la forme (14), substituons à la relation (15) la relation obtenue en remplaçant dans le premier terme de cette équation  $\alpha^n$  par sa valeur (14); on aura, après avoir

chassé les dénominateurs, le système

$$(f) \quad \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ B = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (17) \\ (18) \end{matrix}$$

qui se compose évidemment du système (e), plus du système étranger défini par

$$(g) \quad \begin{cases} B_1 = 0, \\ B = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (19) \\ (20) \end{matrix}$$

c'est-à-dire par

$$(h) \quad \begin{cases} B_1(x, y) = 0, \\ B_2(x, y) z^{n-1} - B_3(x, y) z^{n-2} - B_4(x, y) z^{n-3} - \dots = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (21) \\ (22) \end{matrix}$$

en sorte que  $f$  représentera non seulement le lieu (e), mais encore la courbe étrangère, comptée, en général,  $n-1$  fois, ayant pour équation

$$B_1(x, y) = 0. \quad (23)$$

Cette introduction d'un lieu étranger rend encore le système  $f$ , qui est de la forme

$$(i) \quad \begin{cases} F = F_1(x, y) z^{n-1} - F_2(x, y) z^{n-2} - F_3(x, y) z^{n-3} - \dots = 0, \\ B = B_1(x, y) z^n - B_2(x, y) z^{n-1} - B_3(x, y) z^{n-2} - \dots = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (24) \\ (25) \end{matrix}$$

plus facile à résoudre que le système (e), puisque l'équation 15 se trouve remplacée par l'équation (24), qui est de degré moindre d'une unité par rapport au paramètre à éliminer  $z$ . De là ce théorème :

**THÉORÈME II.** — *Quel que soit l'exposant  $n$  dans les deux équations e, on peut toujours, sauf à introduire des solutions étrangères parfaitement définies, substituer à ce système un système de la forme (i) dans lequel l'exposant  $n$  est diminué d'une unité dans l'une des équations.*

L'application du théorème I au système (i) permettant d'abaisser d'une unité l'exposant de  $\alpha$  dans l'équation (25), il est manifeste que l'application successive des théorèmes I et II suffira, sauf, redisons-le, à introduire des solutions étrangères *parfaitement définies*, pour pouvoir substituer au système proposé ( $\alpha'$ ) un système de la forme

$$(j) \quad \begin{cases} G = G_1(x, y)\alpha + G_2(x, y) = 0, & (26) \\ H = H_1(x, y)\alpha^2 + H_2(x, y)\alpha + H_3(x, y) = 0, & (27) \end{cases}$$

que l'on remplacera par

$$(k) \quad \begin{cases} G_1(x, y)\alpha + G_2(x, y) = 0, & (29) \\ H_1 G_2^2 - H_2 G_1 G_2 + H_3 G_1^2 = 0. & (30) \end{cases}$$

En débarrassant l'équation (30) des facteurs étrangers (préalablement connus), on aura finalement le système

$$(l) \quad \begin{cases} G_1(x, y)\alpha + G_2(x, y) = 0, & (31) \\ K(x, y) = 0, & (32) \end{cases}$$

qui sera équivalent au système proposé ( $\alpha'$ ) : l'équation (32) sera l'équation cherchée.

*Nota.* — Il est évident (puisque'il suffirait de se le donner tel *a priori*) que le système final (l) peut se présenter sous la forme

$$(p) \quad \begin{cases} J(x, y, \alpha) = 0, & (33) \\ K(x, y) = 0, & (34) \end{cases}$$

le plus haut exposant de  $\alpha$  étant, dans l'équation (33), supérieur à l'unité.

*Points multiples* (<sup>1</sup>). — D'après le système [(26) et

(<sup>1</sup>) Il s'agit, bien entendu, des points multiples de la première classe.  
— Voir notre *Mémoire Historique et développement d'une méthode pour déterminer les singularités ordinaires d'un lieu géométrique défini par k équations*.

(27)], les points communs aux deux courbes représentées par

$$G_1(x, y) = 0, \quad G_2(x, y) = 0 \quad (35)$$

sont des points multiples du lieu défini par ce système : il correspond, en effet, à chacun de ces points *deux* valeurs de  $\alpha$  qui sont racines de l'équation (27). Pour obtenir séparément les points multiples du lieu proposé ( $\alpha'$ ), il suffira de défalquer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères. Ajoutons, au sujet de ces courbes étrangères, que la détermination de leur degré de multiplicité, comme celle d'ailleurs des points multiples, suppose connue la connaissance de la forme du système final ( $l$ ). Dans ce qui précède, nous avons essentiellement supposé que l'équation (31) de ce système final contenait seulement au *premier degré* le paramètre  $\alpha$ .

### III. — APPLICATION DU PREMIER PROBLÈME.

Afin de mieux préciser les considérations précédentes, nous allons les développer à nouveau sur un cas particulier, celui où le lieu est défini par les équations

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = A_1(x, y)\alpha^3 + A_2(x, y)\alpha^2 \\ \quad + A_3(x, y)\alpha + A_4(x, y) = 0, \end{array} \right\} \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = B_1(x, y)\alpha^3 + B_2(x, y)\alpha^2 \\ \quad + B_3(x, y)\alpha + B_4(x, y) = 0. \end{array} \right\} \quad (37)$$

Substituons à ce système le système

$$(S_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = 0, \\ A = 0, \end{array} \right. \quad (38)$$

$$(39)$$

obtenu en écrivant l'équation (36) sous la forme

$$\alpha^3 = - \frac{A_2\alpha^2 + A_3\alpha + A_4}{A_1},$$

et en substituant cette valeur de  $\alpha^3$  dans le premier terme de (37); on a introduit ainsi le lieu étranger défini par

$$(S_3) \quad \begin{cases} A_1(x, y) = 0, & (40) \\ A = 0, & (41) \end{cases}$$

c'est-à-dire par

$$(S_4) \quad \begin{cases} A_1(x, y) = 0, & (42) \\ A_2(x, y)\alpha^2 + A_3(x, y)\alpha + A_4(x, y) = 0, & (43) \end{cases}$$

ce qui représente *deux* fois la courbe ayant pour équation

$$A_1(x, y) = 0. \quad (44)$$

Cela fait, le système  $(S_2)$  pouvant s'écrire

$$(S_5) \quad \begin{cases} \alpha^2 = \frac{\alpha(A_1 B_3 - A_3 B_1) + A_1 B_4 - A_4 B_1}{A_2 B_1 - A_1 B_2}, & (45) \\ A_1 \alpha^3 + A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha + A_4 = 0, & (46) \end{cases}$$

substituons-lui le système

$$(S_6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = \frac{\alpha(A_1 B_3 - A_3 B_1) + A_1 B_4 - A_4 B_1}{A_2 B_1 - A_1 B_2}, & (47) \\ A_1 \alpha \frac{\alpha(A_1 B_3 - A_3 B_1) + A_1 B_4 - A_4 B_1}{A_2 B_1 - A_1 B_2} \\ \quad + A_2 \alpha^2 + A_3 \alpha + A_4 = 0, & (48) \end{array} \right\}$$

obtenu en écrivant le premier terme de (46) sous la forme  $A_1 \alpha^2 \times \alpha$  et remplaçant  $\alpha^2$  par sa valeur (45). On a introduit de la sorte le lieu étranger défini par

$$(S_7) \quad \begin{cases} \alpha(A_1 B_3 - A_3 B_1) + A_1 B_4 - A_4 B_1 = 0, & (49) \\ A_2 B_1 - A_1 B_2 = 0, & (50) \end{cases}$$

c'est-à-dire *une* fois la courbe ayant pour équation

$$A_2(x, y) B_1(x, y) - A_1(x, y) B_2(x, y) = 0. \quad (51)$$

En effectuant les calculs, le système (S<sub>8</sub>) s'écrit :

$$(S_8) \begin{cases} C = (A_2 B_1 - A_1 B_2) x^2 + x(A_3 B_1 - A_1 B_3) \\ \quad + A_4 B_1 - A_1 B_4 = 0, \end{cases} \quad (52)$$

$$(S_8) \begin{cases} D = [A_1(A_1 B_3 - A_3 B_1) + A_2(A_2 B_1 - A_1 B_2)] x^2 \\ \quad + [A_1(A_1 B_4 - A_4 B_1) + A_3(A_2 B_1 - A_1 B_2)] x \\ \quad + A_4(A_2 B_1 - A_1 B_2) = 0; \end{cases} \quad (53)$$

substituons-lui le système

$$(S_9) \begin{cases} C[A_1(A_1 B_3 - A_3 B_1) + A_2(A_2 B_1 - A_1 B_2)] \\ \quad - D(A_2 B_1 - A_1 B_2) = 0, \end{cases} \quad (54)$$

$$C = 0, \quad (55)$$

comprenant le lieu étranger défini par

$$(S_{10}) \begin{cases} A_2 B_1 - A_1 B_2 = 0. \end{cases} \quad (56)$$

$$C = 0, \quad (57)$$

c'est-à-dire par

$$(S_{11}) \begin{cases} A_2 B_1 - A_1 B_2 = 0, \end{cases} \quad (58)$$

$$(A_3 B_1 - A_1 B_3) x + A_4 B_1 - A_1 B_4 = 0, \quad (59)$$

ce qui représente encore *une* fois la courbe ayant pour équation

$$A_2(x, y) \cdot B_1(x, y) - A_1(x, y) \cdot B_2(x, y) = 0. \quad (60)$$

Cela fait, le système (S<sub>9</sub>) pouvant s'écrire

$$(S_{12}) \begin{cases} \left\{ (A_3 B_1 - A_1 B_3) [A_1(A_1 B_3 - A_3 B_1) + A_2(A_2 B_1 - A_1 B_2)] \right. \\ \quad - [A_1(A_1 B_4 - A_4 B_1) + A_3(A_2 B_1 - A_1 B_2)] (A_2 B_1 - A_1 B_2) \left. \right\} x \\ \quad + \{ (A_4 B_1 - A_1 B_4) [A_1(A_1 B_3 - A_3 B_1) + A_2(A_2 B_1 - A_1 B_2)] \\ \quad - A_4(A_2 B_1 - A_1 B_2)^2 \} = 0, \\ (A_2 B_1 - A_1 B_2) x^2 + (A_3 B_1 - A_1 B_3) x + A_4 B_1 - A_1 B_4 = 0, \end{cases}$$

tirons de l'équation (61) la valeur de  $\alpha$  pour la substituer dans (62); en écrivant cette équation (61) sous la forme  $\alpha X + Y = 0$ , nous aurons le système final

$$(S_{13}) \begin{cases} \alpha X + Y = 0, \\ (A_2 B_1 - A_1 B_2) Y^2 - XY(A_3 B_1 - A_1 B_3) \\ \quad + (A_4 B_1 - A_1 B_4) X^2 = 0 \end{cases} \quad (63) \quad (64)$$

qui sera tel que la relation (64) se composera :

- 1° De *deux* fois l'équation  $A_1(x, y) = 0$ ;
- 2° De *deux* fois l'équation  $A_2B_1 - A_1B_2 = 0$ ;
- 3° De l'équation du lieu cherché.

C'est ce que l'on vérifie, en effet, sans peine, en employant les notations abrégées suivantes :

$$\begin{aligned} a &= A_2B_1 - A_1B_2, & b &= A_3B_1 - A_1B_3, & c &= A_4B_1 - A_1B_4, \\ a' &= aA_2 - bA_1, & b' &= aA_3 - cA_1, & c' &= aA_4, \\ d &= A_2B_4 - A_4B_2, & l &= A_3B_2 - A_2B_3, & m &= A_4B_3 - A_3B_4. \end{aligned}$$

Il suffit de reprendre le calcul à partir des équations (52, 53), d'observer que l'équation (64), qui se présente sous la forme

$$a[(ac' - ca')^2 + (ab' - ba')(cb' - bc')] = 0, \quad (65)$$

peut aussi s'écrire en remplaçant  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  par leurs valeurs

$$a^2 \left[ \begin{aligned} &a(aA_4 - cA_2)^2 + 2bc(aA_4 - cA_2) \\ &\times (aA_3 - bA_2 - cA_1)(cA_3 - bA_4) \\ &+ A_1b^2(cA_3 - bA_4) - A_1c^2(aA_3 - cA_1) \end{aligned} \right] = 0, \quad (66)$$

d'où l'on déduit immédiatement, en effectuant chaque parenthèse,

$$a^2 A_1^2 (ad^2 + mb^2 + lc^2 + 2bcd + alm) = 0; \quad (67)$$

en sorte que le système proposé est équivalent au système

$$(S_{14}) \quad \begin{cases} \alpha X + Y = 0 & (1), \\ ad^2 + mb^2 + lc^2 + 2bcd + alm = 0. \end{cases} \quad (68) \quad (69)$$

*Points doubles.* — Les points doubles sont les points communs aux deux courbes représentées, car

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad (70)$$

---

(<sup>1</sup>) On va voir que  $X$  et  $Y$  doivent contenir le facteur  $A_1(x, y)$  que l'on devra partant supprimer.

à condition de supprimer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères pour lesquelles il correspond à chacun de leurs points au moins deux valeurs du paramètre ( $\alpha$ ), c'est-à-dire, ici, tous les points de la courbe représentée par  $A_1(x, y) = 0$ .

#### IV. — DEUXIÈME PROBLÈME.

PROBLÈME. — *Éliminer  $\alpha$  entre les deux équations*

$$(S_1) \quad \begin{cases} A(x, y, z, \alpha) = 0, & (71) \\ B(x, y, z, \alpha) = 0, & (72) \end{cases}$$

*supposées algébriques entières et rationnelles, et déterminer les points multiples de la surface qu'elles définissent.*

*Solution.* — Il suffit de refaire exactement les mêmes calculs que dans le *premier problème*, sauf à remarquer qu'au lieu d'introduire des *courbes étrangères* on introduit des *surfaces étrangères* définies par des équations de la forme

$$(S_2) \quad \begin{cases} N(x, y, z) = 0, & (73) \\ M_1(x, y, z)\alpha^\mu + M_2(x, y, z)\alpha^{\mu-1} \\ \quad + M_3(x, y, z)\alpha^{\mu-2} + \dots = 0. \end{cases} \quad (74)$$

*Points multiples.* — En procédant comme nous venons de le dire, on rencontre, avant de parvenir au système final, des systèmes de la forme

$$(S_3) \quad \begin{cases} C_1(x, y, z)\alpha^2 + C_2(x, y, z)\alpha + C_3(x, y, z) = 0, & (75) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1(x, y, z)\alpha^3 + D_2(x, y, z)\alpha^2 \\ \quad + D_3(x, y, z)\alpha + D_4(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (76)$$

$$(S_4) \quad \begin{cases} C_1(x, y, z)\alpha^2 + C_2(x, y, z)\alpha + C_3(x, y, z) = 0, & (77) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1(x, y, z)\alpha + E_2(x, y, z) = 0. & (78) \end{cases}$$

Il résulte de là :

1° Que les points communs aux trois surfaces repré-



sentées par

$$C_1(x, y, z) = 0, \quad C_2(x, y, z) = 0, \quad C_3(x, y, z) = 0 \quad (79)$$

sont des *points triples* du lieu  $(S_3)$  : il correspond, en effet, à chacun de ces points, *trois* valeurs de  $\alpha$  qui sont racines de l'équation (76) ;

2° Que les points communs aux deux surfaces représentées par

$$E_1(x, y, z) = 0, \quad E_2(x, y, z) = 0 \quad (80)$$

sont des *points doubles* du lieu  $(S_4)$  : il correspond, en effet, à chacun de ses points, *deux* valeurs de  $\alpha$  qui sont racines de l'équation (77) <sup>(1)</sup>.

#### V. — TROISIÈME PROBLÈME.

*Problème.* — Éliminer  $\alpha, \beta$  entre les trois équations

$$(S_1) \quad \begin{cases} A(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (1) \\ B(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (2) \\ C(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (3) \end{cases}$$

*supposées algébriques entières et rationnelles, et déterminer les points multiples du lieu qu'elles définissent.*

*Solution.* — 1° On ordonnera les équations (1, 2) par rapport à  $\alpha$  :

$$(S_2) \quad \begin{cases} A = A_1(x, y, \beta)\alpha^m + A_2(x, y, \beta)\alpha^{m-1} \\ \quad \quad \quad + A_3(x, y, \beta)\alpha^{m-2} + \dots = 0, & (4) \\ B = B_1(x, y, \beta)\alpha^n + B_2(x, y, \beta)\alpha^{n-1} \\ \quad \quad \quad + B_3(x, y, \beta)\alpha^{n-2} + \dots = 0, & (5) \\ C(x, y, \alpha, \beta) = 0. & (6) \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> Parmi ces points doubles, ceux qui se trouvent sur la surface représentée par

$$C_2^2 - 4C_1C_3 = 0$$

sont de rebroussement.

2° On considérera  $\beta$  comme un coefficient et l'on éliminera, entre les équations (4), (5), par le procédé suivi pour résoudre le *premier problème*, le paramètre  $\alpha$ , ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_2) \quad \begin{cases} D_1(x, y, \beta)\alpha + D_2(x, y, \beta) = 0, & (7) \\ E(x, y, \beta) = 0, & (8) \\ C(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (9) \end{cases}$$

qui se composera du système  $(S_2)$ , plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_3) \quad \begin{cases} F(x, y, \beta) = 0, & (10) \\ G(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (11) \\ C(x, y, \alpha, \beta) = 0. & (12) \end{cases}$$

3° On tirera de l'équation (7) la valeur de  $(\alpha)$  pour la substituer dans (9), ce qui conduira au système

$$(S_4) \quad \begin{cases} D_1(x, y, \beta)\alpha + D_2(x, y, \beta) = 0, & (13) \\ E(x, y, \beta) = 0, & (14) \\ H(x, y, \beta) = 0. & (15) \end{cases}$$

4° On éliminera, toujours par le procédé suivi dans la solution du *premier problème*, le paramètre  $\beta$  entre les équations (14), (15), ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_5) \quad \begin{cases} D_1(x, y, \beta)\alpha + D_2(x, y, \beta) = 0, & (16) \\ G_1(x, y)\beta + G_2(x, y) = 0, & (17) \\ I(x, y) = 0, & (18) \end{cases}$$

qui se composera du système  $(S_5)$ , plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_7) \quad \begin{cases} D_1(x, y, \beta)\alpha + D_2(x, y, \beta) = 0, & (19) \\ J(x, y) = 0, & (20) \\ K(x, y) = 0. & (21) \end{cases}$$

5° Soient  $W(x, y) = 0$  l'équation (18) débarrassée

des facteurs étrangers, et  $W_1(x, y)\alpha + V_2(x, y) = 0$  l'équation obtenue en remplaçant dans (16) la lettre  $\beta$  par sa valeur tirée de (17); le système

$$(S_8) \quad \begin{cases} V_1(x, y)\alpha + V_2(x, y) = 0, & (23) \\ G_1(x, y)\beta + G_2(x, y) = 0, & (23) \\ W(x, y) = 0 & (24) \end{cases}$$

sera équivalent au système proposé  $(S_1)$ , et l'équation (24) sera l'équation cherchée.

*Nota I.* — Il est très important d'observer que, si l'on ne suivait pas exactement l'ordre que nous venons d'indiquer, on pourrait fort bien introduire *tout le plan* comme lieu étranger, et partant l'élimination deviendrait impossible dans la suite. C'est, en effet, ce qui arriverait si l'on écrivait, par exemple, l'équation (4) sous la forme

$$= - \frac{A_2(x, y, \beta)\alpha^{m-1} + A_3(x, y, \beta)\alpha^{m-2} + A_4(x, y, \beta)\alpha^{m-3} + \dots}{A_1(x, y, \beta)}, \quad (25)$$

et si l'on substituait à la fois cette valeur de  $\alpha^m$  dans les deux autres équations; on introduirait de la sorte tout le plan défini par les équations

$$(S_9) \quad \begin{cases} A_2(x, y, \beta)\alpha^{m-1} + A_3(x, y, \beta)\alpha^{m-2} \\ \quad + A_4(x, y, \beta)\alpha^{m-3} + \dots = 0, & (26) \\ A_1(x, y, \beta) = 0, & (27) \end{cases}$$

contenant deux paramètres variables  $\alpha$  et  $\beta$ .

*Nota II.* — Il est évident (puisqu'il suffirait de se le donner tel *a priori*) que le système final  $(S_8)$  peut se présenter sous la forme

$$(S_{10}) \quad \begin{cases} V_1(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (28) \\ V_2(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (29) \\ W(x, y) = 0, & (30) \end{cases}$$

les plus hauts exposants de  $\alpha, \beta$  étant, dans les équations (28), (29), supérieurs à l'unité.

*Points multiples.* — Avant de parvenir au système  $(S_6)$ , on rencontre un système de la forme

$$(S_{11}) \quad \begin{cases} D_1(x, y, \beta)z - D_2(x, y, \beta) = 0, & (31) \\ G_1(x, y)\beta - G_2(x, y) = 0, & (32) \\ M_1(x, y)\beta^2 - M_2(x, y)\beta - M_3(x, y) = 0. & (33) \end{cases}$$

Les points communs aux deux courbes représentées par

$$G_1(x, y) = 0, \quad G_2(x, y) = 0 \quad (34)$$

sont des points multiples du lieu défini par ce système; il correspond, en effet, à chacun de ces points *deux* valeurs de  $\beta$  qui sont racines de l'équation (33), et, partant, à cause de (31), *deux* valeurs de  $z$ ; il est d'ailleurs bien évident que, pour obtenir séparément les points multiples du lieu proposé  $(S_1)$ , on devra défalquer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères pour lesquelles il correspond à chacun de leurs points au moins deux valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

## VI. — QUATRIÈME PROBLÈME.

**PROBLÈME.** — Éliminer  $\alpha, \beta, \gamma$  entre les équations

$$(S_1) \quad \begin{cases} A(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (1) \\ B(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (2) \\ C(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (3) \\ D(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (4) \end{cases}$$

*supposées algébriques entières et rationnelles, et déterminer les points multiples du lieu qu'elles définissent.*

*Solution.* — 1° On considérera  $\gamma$  comme un coefficient et l'on éliminera, entre les équations (1), (2), (3), par le procédé suivi pour résoudre le *troisième problème*, les paramètres  $\alpha, \beta$ , ce qui conduira à un sys-

tème de la forme

$$(S_2) \quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (5) \\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (6) \\ G(x, y, \gamma) = 0, & (7) \\ D(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (8) \end{cases}$$

qui se composera du système  $(S_1)$ , plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_3) \quad \begin{cases} H(x, y, \alpha, \beta) = 0, & (9) \\ I(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (10) \\ J(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (11) \\ D(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0. & (12) \end{cases}$$

2° On tirera des équations (5), (6) les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  pour les porter dans (8), ce qui conduira au système

$$(S_4) \quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (13) \\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (14) \\ G(x, y, \gamma) = 0, & (15) \\ K(x, y, \gamma) = 0. & (16) \end{cases}$$

3° On éliminera, par le procédé employé dans la solution du *premier problème*, le paramètre  $\gamma$ , entre les équations (15), (16), ce qui conduira à un système de la forme

$$(S_5) \quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (17) \\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (18) \\ M_1(x, y)\gamma + M_2(x, y) = 0, & (19) \\ N(x, y) = 0, & (20) \end{cases}$$

qui se composera du système  $(S_4)$ , plus d'un certain nombre de systèmes étrangers de la forme

$$(S_6) \quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (21) \\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (22) \\ P(x, y, \gamma) = 0, & (23) \\ Q(x, y) = 0. & (24) \end{cases}$$

4° Soient  $W(x, y) = 0$  l'équation (20) débarrassée des facteurs étrangers, et

$$V_1(x, y)\alpha + V_2(x, y) = 0, \quad (25)$$

$$U_1(x, y)\beta + V_2(x, y) = 0 \quad (26)$$

les équations obtenues en remplaçant dans (17), (18) la lettre  $\gamma$  par sa valeur tirée de (19), le système

$$(S_7) \quad \begin{cases} V_1(x, y)\alpha + V_3(x, y) = 0, & (27) \\ U_1(x, y)\beta + V_2(x, y) = 0, & (28) \\ M_1(x, y)\gamma + M_2(x, y) = 0, & (29) \\ W(x, y) = 0 & (30) \end{cases}$$

sera équivalent au système  $(S_1)$ , et l'équation

$$W(x, y) = 0 \quad (31)$$

sera l'équation cherchée.

*Nota.* — Il est évident (puisque'il suffirait de se le donner tel *a priori*) que le système final  $(S_7)$  peut se présenter sous la forme

$$(S_8) \quad \begin{cases} R_1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (32) \\ R_2(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (33) \\ R_3(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 0, & (34) \\ W(x, y) = 0, & (35) \end{cases}$$

les plus hauts exposants de  $\alpha, \beta, \gamma$  étant, dans les équations (32), (33), (34), supérieurs à l'unité; on conçoit de plus, sans peine, que l'on puisse choisir les équations de manière que les courbes représentées par (32), (33), (34) n'aient jamais de points communs, quelles que soient les valeurs attribuées à  $\alpha, \beta, \gamma$ ; dans ce cas, bien que l'équation (35) puisse représenter une courbe réelle, le système  $(S_1)$  ne définit pas un *lieu* proprement dit,

c'est-à-dire que les courbes représentées par (1), (2), (3), (4) ne se croisent jamais en un même point, quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  (<sup>1</sup>).

*Points multiples.* — Avant de parvenir au système ( $S_3$ ), on rencontre un système de la forme

$$(S_3) \quad \begin{cases} E_1(x, y, \gamma)\alpha + E_2(x, y, \gamma) = 0, & (36) \\ F_1(x, y, \gamma)\beta + F_2(x, y, \gamma) = 0, & (37) \\ M_1(x, y)\gamma + M_2(x, y) = 0, & (38) \\ T_1(x, y)\gamma^2 + T_2(x, y)\gamma + T_3(x, y) = 0; & (39) \end{cases}$$

les points communs aux deux courbes représentées par

$$M_1(x, y) = 0, \quad M_2(x, y) = 0 \quad (40)$$

sont des points multiples du lieu défini par ce système; il correspond, en effet, à chacun de ces points *deux* valeurs de  $\gamma$  qui sont racines de l'équation (39), et, par-tant, à cause de (36), (37), deux valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ . Pour obtenir uniquement les points multiples du lieu pro-posé, on devra supprimer les points multiples résultant de l'introduction des courbes étrangères.

*Observation finale.* — Les développements précédents suffisent évidemment pour démontrer la généralité, à tous les cas possibles, de la méthode suivie.

*Addition.* — Nous développerons dans une Commu-nication spéciale les calculs relatifs aux points multiples

(<sup>1</sup>) En voici un exemple :

$$R(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 1,$$

$$R(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 2,$$

$$R(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = 3,$$

$$W(x, y) = 0.$$

des lieux (A) et (B) définis par

$$(A) \quad \begin{cases} U(\alpha, \beta) = 0, \\ \frac{x}{\frac{dU}{d\alpha}} = \frac{y}{\frac{dU}{d\beta}} = \frac{1}{\frac{dU}{dt}}; \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} U(\alpha, \beta) = 0, \\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0, \\ \frac{x - \alpha}{\frac{dU}{d\alpha}} = \frac{y - \beta}{\frac{dU}{d\beta}}, \end{cases}$$

points multiples permettant de déterminer, comme nous l'avons prouvé dans le Mémoire déjà cité, *Historique et développement*, etc., les points de contact des tangentes doubles et les centres des cercles de rayon  $R$  doublement tangents à la courbe représentée par

$$U(x, y) = 0 \quad (1).$$

*Nota.* — On obtiendra le lieu des centres des sphères de rayon  $R$  (2) doublement tangentes à la surface représentée par

$$U(x, y, z) = 0,$$

en cherchant la ligne double de la surface définie par

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, \gamma) &= 0, \\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - R^2 &= 0, \\ \frac{x - \alpha}{\frac{dU}{d\alpha}} &= \frac{y - \beta}{\frac{dU}{d\beta}} = \frac{z - \gamma}{\frac{dU}{d\gamma}}. \end{aligned}$$

(1) Aux points de rebroussement du lieu (A) correspondent les points d'inflexion de la courbe  $U$ , et aux points de rebroussement du lieu (B) correspondent les points de contact des cercles de rayon  $R$  osculateurs à cette même courbe.

(2) Si l'on suppose, à la fin du calcul,  $R = 0$ , on a la focale de la surface.



---

**ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (CONCOURS DE 1881).**

---

*Physique.*

I. Dans une machine à diviser, le pas de la vis est d'un demi-millimètre à la température zéro. La température étant de  $\theta$  degrés, on veut diviser avec cette machine une règle en laiton, de telle sorte que les divisions de la règle vailent un millimètre à zéro : comment faut-il régler le tambour de la vis ? On désignera par  $f$  et  $l$  les coefficients de dilatation linéaire du fer et du laiton. Le premier étant de 12 millièmes et le second de 19, on calculera le nombre cherché pour  $\theta = 10$ .

La règle étant ainsi divisée, on s'en servira pour mesurer la hauteur d'un baromètre à la température  $t^\circ$  et on réduira cette hauteur à zéro. On désignera par  $k$  le coefficient de dilatation cubique du mercure :  $k$  étant de 180 millièmes, on calculera le coefficient numérique de la correction.

II. Comment détermine-t-on le grossissement dans le microscope ?

Dans un microscope dont les deux lentilles sont à une distance invariable, on a appliqué contre l'objectif une lame de verre, de sorte qu'il reste entre l'objectif et la lame un espace vide formant un ménisque concave. On détermine par l'expérience :

- 1° Le grossissement  $\gamma$ , lorsque le ménisque est vide;
- 2° Le grossissement  $g$ , lorsqu'on y a introduit une goutte d'eau d'indice  $n$ ;
- 3° Le grossissement  $g'$ , lorsqu'on y a introduit une goutte de liquide d'indice  $n'$ .

On demande l'indice de ce liquide.

L'indice de l'eau étant  $\frac{4}{3}$  et les trois grossissements 50, 30, 20, quel est l'indice du liquide ?

---

**TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.**
(TOME XX, 2<sup>e</sup> SÉRIE.)

---

**Théorie des nombres.**

	Pages.
Questions d'Analyse indéterminée, proposées par M. Édouard Lucas ; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	150 et 201
Sur un procédé particulier de division rapide; par M. <i>C. Henry</i> .....	213
Questions nouvelles d'Arithmétique supérieure, proposées par M. Édouard Lucas; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	253
Décomposition des nombres $f^{12} - 9g^{12}$ et du double de ces nom- bres en deux cubes rationnels; par M. <i>C. Henry</i> .....	418
Propositions; par M. <i>Lionnet</i> .....	514

**Algèbre.**

Sur le calcul des dérangements; par M. <i>C. Henry</i> .....	5
Réduction de deux polynômes homogènes du second degré à des sommes de carrés; par M. <i>H. Laurent</i> .....	38
Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation; par M. <i>G. Candèze</i> .....	49
Sur le théorème de Rolle; par M. <i>J. Collin</i> .....	132
Remarques sur le théorème de Sturm; par M. <i>Candèze</i> .....	193
Résolution de l'équation du troisième degré; par M. le Dr <i>Auguste Scholtz</i> .....	220
Résolution de l'équation du quatrième degré; par M. <i>F. Briot</i> ...	225
Sur la résolution d'un système particulier de deux équations si- multanées du degré $m$ à deux inconnues; par M. <i>Escary</i> .....	227
Note sur les limites et les nombres incommensurables; par M. <i>E. Jablonski</i> .....	241
Démonstration de propositions énoncés; par M. <i>S. Réalis</i> .....	408
Note sur des formules de Joachimsthal; par M. <i>A. Droz</i> .....	411
Exercices de calcul algébrique; par M. <i>S. Réalis</i> .....	501
Contribution à la théorie de la substitution des systèmes d'équa- tions. Application de cette théorie à la recherche de l'équation et des points multiples d'un lieu défini par $k$ équations conte- nant $k - 1$ paramètres variables; par M. <i>L. Saltel</i> .....	546

**Géométrie élémentaire.**

Solution géométrique d'une question proposée en 1879 au Con- cours d'agrégation pour l'enseignement secondaire spécial; par M. <i>Léonce Lebrun</i> .....	12
---	----

	Pages.
Note sur une enveloppe; par M. <i>S.-F.-W. Bachr</i> .....	250
Solution d'une question du Concours général de 1879; par M. <i>A. Leinekugel</i> .....	307
Solution d'une question du Concours général de 1879; par M. <i>H. Lez</i> .....	310
Solution d'une question du Concours général de 1880; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	314
Solution d'une question du Concours général de 1880; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	315
Solution d'une question du Concours général de 1880; par un <i>Abonné</i> .....	317
Solution d'une question du Concours général de 1880; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	319
Sur l'expression du volume de certains tétraèdres; par M. <i>H. Faure</i> .....	338
Sur un théorème de Pappus; par M. <i>H. Resal</i> .....	433
Solution d'une question proposée par M. Catalan; par M. <i>P. Barbarin</i> .....	453

### Géométrie cinématique.

Sur la construction de la normale dans un certain mode de génération des courbes planes; par M. <i>Maurice d'Ocagne</i> .....	197
Note sur le système articulé du colonel Peaucellier; par M. <i>Maurice d'Ocagne</i> ....	456

### Géométrie à deux dimensions.

Construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe; par M. <i>G. Kœnigs</i> .....	11
Solution d'une question proposée, en 1876, au Concours entre les classes de Mathématiques spéciales de l'Académie de Douai; par M. <i>A. Hilaire</i> .....	14
Solution de la question proposée en 1879, pour le Concours d'admission à l'École Polytechnique; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	65
Théorèmes sur les normales à l'ellipse; par M. <i>Weill</i> .....	73 et 110
Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques; par M. <i>Ch. Biehler</i> .....	97, 489 et 537
Solution de la question proposée pour le Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1880; par M. <i>H. Lez</i> .....	127
Sur l'équation de Hesse aux points d'inflexion; par M. <i>Cretin</i> .....	131
Normale menée à une conique à centre d'un point de l'axe focal; par M. <i>Ernest Lebon</i> .....	133
Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal; par M. <i>Weill</i> .....	160
Concours d'admission à l'École Centrale; solution de M. <i>J. Bou-dènes</i> .....	235
Sur les propriétés principales des foyers des courbes du second	

degré et sur la détermination analytique de ces points; par M. le	
D <sup>r</sup> <i>A. Letnikow</i> .....	289
Exercices de Géométrie; par M. <i>Ed. Dewulf</i> .....	391
Question; par M. <i>Ed. Dewulf</i> .....	401
Sur le nombre des points multiples d'une courbe algébrique et les	
courbes unicursales; par M. <i>E. Pellet</i> . ....	444
Solutions de quelques questions posées aux examens d'admission	
à l'École Polytechnique; par M. l'abbé <i>A. Geneix-Martin</i> .....	459
Concours d'admission à l'École Centrale en 1880 (deuxième ses-	
sion); par M. <i>A. Chambeau</i> .....	464
Théorèmes sur les courbes algébriques; par M. <i>Weill</i> .....	498

### Géométrie à trois dimensions.

Sur la déformation du cache-pot; par M. <i>Édouard Lucas</i> .....	9
Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au	
Concours général de 1878; par M. <i>Carlos Michaux</i> .....	17
Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au	
Concours général de 1879; par M. <i>J. Griess</i> .....	20
Solution de la question proposée en 1879, pour l'admission à	
l'École Normale supérieure; par M. <i>J. Griess</i> .....	27
Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École	
Normale en 1880; par M. <i>J. Griess</i> .....	120
Note de Géométrie; par M. <i>A. Droz</i> .....	305
Sur une classe de surfaces du quatrième ordre; par M. <i>V.</i>	
<i>Jamet</i> .....	344, 385 et 434
Note sur les conditions qui expriment qu'une surface du second	
degré est de révolution; par M. <i>Genty</i> .....	414

### Mécanique.

Remarque sur le centre de composition d'un système de forces	
quelconques dans le plan; par M. <i>Maurice d'Ocagne</i> .....	201
Condition d'équilibre d'une masse fluide homogène, ayant la	
forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux et animée d'un mou-	
vement uniforme de rotation autour de l'un de ces axes; par	
M. <i>A. Picart</i> .....	216
Problème de Mécanique; par M. <i>E. Fauquembergue</i> .....	231
Note sur la généralisation d'un théorème de Pappus; par M. <i>H.</i>	
<i>Resal</i> .....	337
Sur le mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu ré-	
sistant; par M. <i>Maurice d'Ocagne</i> .....	506

### Calcul différentiel et intégral.

Solution d'une question de Licence; par M. <i>E. Fauquembergue</i> ...	35
Sur la détermination du cercle osculateur d'une courbe à double	
courbure; par M. <i>E. Hunvady</i> .....	5

	Pages.
<b>Solution d'une question de Licence; par M. E. Fauquembergue...</b>	55
<b>Solution d'une question d'Analyse, proposée au Concours d'Agrégation de 1879; par M. P. Barbarin.....</b>	57
<b>Surfaces applicables sur des surfaces de révolution; par M. A. Picart.....</b>	113
<b>Nouvelle méthode d'intégration de l'équation différentielle des lignes de courbure de l'ellipsoïde; par M. A. Picart.....</b>	145
<b>Sur une question de Licence; par M. E. Fauquembergue .....</b>	171
<b>Solution d'une question de Licence; par M. Évesque. ....</b>	229
<b>Question de Licence; par M. E. Fauquembergue.....</b>	348
<b>Note sur un système de courbes orthogonales et homofocales; par M. A. Legoux.....</b>	406
<b>Question de Licence; par M. E. Fauquembergue....</b>	416
<b>Question de Licence (Paris, juillet 1880); par M. E. Fauquembergue.....</b>	420
<b>Question de Licence (Paris, juillet 1880); par M. E. Fauquembergue.....</b>	471
<b>Sur la fonction génératrice des polynômes <math>P_{m,n}</math> de Didon; par M. G.-A. Orlow.....</b>	481
<b>Sur la détermination de quelques intégrales indéfinies; par M. H. Resal .....</b>	529

### Mélanges.

<b>Correspondance.....</b>	91, 139, 173, 240, 265, 321 et	423
<b>Publications récentes.....</b>	95, 185 et	365
<b>Concours général de 1880.....</b>		134
<b>Nécrologie.....</b>		137
<b>Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1880.....</b>		238
<b>Erratum aux Tables de logarithmes de Schrön.....</b>		240
<b>Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1880).....</b>		351
<b>École Normale supérieure, section des Sciences (Concours de 1881).....</b>	359 et	565
<b>Concours d'admission à l'École centrale des Arts et Manufactures en 1880. ....</b>		360
<b>Rectifications .....</b>	384, 480 et	528
<b>École spéciale Militaire (Concours de 1881).....</b>		421
<b>Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1881.....</b>		468
<b>Concours d'admission à l'École Navale en 1880....</b>		511

### Questions proposées.

<b>Questions 1356 à 1357.....</b>	48
<b>Question 1358.....</b>	96
<b>Questions 1359 à 1361.....</b>	144
<b>Questions 1362 à 1363.....</b>	192
<b>Questions 1364 à 1375.....</b>	380

	Pages.
Question 1376.....	480
Questions 1377 à 1381.....	526

### Questions résolues.

Solution de la question 127; par M. <i>Ch. Brisse</i> .....	329
Solution de la question 251; par M. <i>J. Bourget</i> .....	473
Solution de la question 329; par M. <i>A. Geneix-Martin</i> .....	280
Note sur la question 393; par M. <i>E. Catalan</i> .....	403
Solution de la question 1168; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	150
Solution de la question 1180; par <i>le même</i> .....	204
Solution de la question 1195; par <i>le même</i> .....	330
Note relative à la question 1210; par M. <i>V. Hioux</i> .....	276
Solution de la question 1272; par <i>un anonyme</i> .....	515
Solution de la question 1275; par M. <i>R.-W. Genèse</i> .....	175
Solution de la question 1283; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	518
Solution de la question 1306; par M. <i>Genty</i> .....	368
Solution de la question 1308; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	281
Solution de la question 1313; par M. <i>S. Realis</i> .....	177
Solution de la question 1328; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	333
Solution de la question 1330; par M. <i>S. Realis</i> .....	335
Solution de la question 1331; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	372
Solution de la question 1335; par M. <i>Marcello Rocchetti</i> .....	423
Solution de la question 1338; par M. <i>Ferdinando Pisani</i> .....	373
Solution de la question 1342; par M. <i>A. Leinekugel</i> .....	178
Solution de la question 1343; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	520
Solution de la question 1344; par M. <i>François Laudiero</i> .....	179
Solution de la question 1345; par M. <i>N. Goffart</i> .....	427
Solution de la question 1347; par <i>le même</i> .....	428
Solution de la question 1348; par M. <i>F. Boudènes</i> .....	180
Solution de la question 1349; par M. <i>Moret-Blanc</i> .....	431
Solution de la question 1350; par <i>le même</i> .....	375
Solution de la question 1352; par M. <i>H. Faure</i> .....	342 et 3
Solution de la question 1353; par M. <i>J.-B. Delacourcelle</i> .....	182
Solution de la question 1354; par M. <i>E. Pecquery</i> .....	376
Solution de la question 1355; par M. <i>H. Faure</i> .....	340
Solution de la question 1356; par <i>le même</i> et M. <i>E. Chrétien</i> .....	84
Solution de la question 1357; par M. <i>A. Aignan</i> .....	82
Solution de la question 1358; par M. <i>H. du Montel</i> .....	379
Solution de la question 1373; par M. <i>N. Goffart</i> .....	523
Solution de la question 1374; par <i>le même</i> .....	524
Solution de la question 1376; par M. <i>Catalan</i> .....	528

# TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XX, 2<sup>e</sup> SÉRIE.)

MM.	Pages.
AIGNAN, élève du Lycée Henri IV.....	282 et 423
ALLMAN (G.-J.).....	366
AMIGUES (E.), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Marseille.....	95, 344, 345, 347, 348, 437, 440 et 443
AMIOT (A.).....	186
AMPÈRE.....	367
AMSLER-LAFFON.....	270
ANDRÉ (DÉSIRÉ).....	367 et 368
AOUST (l'abbé).....	96
ARCHIMÈDE.....	13
ARNAUD (V.-M.), élève du Lycée de Nice.....	373
ARTEMIEFF, à Saint-Petersbourg.....	328
AUZELLE (J.), élève du Lycée de Moulins.....	238
BACHET.....	191
BAEHR (G.-F.-W), professeur à l'École Polytechnique de Delft.....	186 et 250
BARBARIN (P.), professeur au Lycée de Nice. 48, 57, 144, 180, 265, 266, 282, 423 et	453
BARDELLI (GIUSEPPE), à Milan.....	187 et 281
BARON, élève du Lycée Henri IV.....	182 et 288
BELLAVITIS (GIUSTO).....	137, 138, 139 et 188
BENOIST (ADOLPHE), docteur en droit.....	95
BERGMANS (C.), répétiteur à l'École du Génie civil de Gand....	281
BERNOULLI (JACQUES).....	190
BERTRAND (J.).....	6
BESCHE.....	240
BIEHLER (CH.), directeur des études à l'École préparatoire du Collège Stanislas.....	97, 189, 191, 489 et 537
BINET.....	412
BOILLEAU (A.).....	96 et 379
BONCOMPAGNI (B.).....	365
BORCHARDT.....	189
BOUDÈNES (J.), élève au Lycée de Grenoble....	180, 184, 235 et 428
BOUR (ED.).....	118
BOURGET, recteur de l'Académie d'Aix.....	473
BOURGUET.....	321
BRILLOUIN (MARCEL).....	192
BRIOT (F.), capitaine d'Infanterie de Marine, à Cherbourg.....	225

	Pages.
BRISSE (Ch.), rédacteur.....	330 et 413
BROCARD (H.), capitaine du Génie.....	330 et 520
CANDÈZE, élève de l'École Polytechnique.....	49 et 193
CAPORALI (Dott. E.).....	188
CARNOY (J.).....	189
CATALAN (E.), professeur à l'Université de Liège. 171, 403, 453 et	528
CAUCHY..... 173, 174, 215 et	412
CAYLEY.....	9 et 448
CESARO (ERNEST).....	384 et 523
CHAMBEAU (A.), élève du Pensionnat Notre-Dame-du-Sacré- Cœur.....	464
CHASLES (M.).. 86, 95, 305, 306, 327, 368, 392, 396, 435, 437 et	448
CHOUDADOW, à Stawropol (Caucase).....	183
CHRÉTIEN (E.), élève du Lycée du Havre.....	184
CLEBSCH (A.).....	95
COLLIGNON (E.).....	403
COLLIN (J.).....	132
COTES.....	229
COTTEREAU.....	515
COURBE (H.), professeur au Lycée de Fribourg, Suisse,.....	238
CRELLE.....	411
CREMONA, directeur de l'École des ingénieurs, à Rome.. 392 et	395
CRETIN, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint- Louis..... 35 et	131
DARBOUX (G.), professeur à la Faculté des Sciences de Paris...	277
DELACOURCELLE (J.-B.), enfant de troupe au 53 <sup>e</sup> de ligne, à Tarbes..... 182 et	319
DELAMBRE.....	367
DESBOVES, membre de l'Académie d'Amiens.... 175, 192, 329, 330 et	367
DESCARTES..... 199 et	356
DEWULF (Ed.), lieutenant-colonel du Génie.. 185, 368, 383, 391, 398, 399, 401, 428 et	480
DIDON..... 481, 482, 483 et	486
DOSTOR (G.), docteur ès sciences..... 384, 467, 480 et	528
DOUCET (L.), professeur au Lycée de Rouen.....	321
DROZ (A.), au Gymnase cantonal de Porrentruy (Berne). 179, 183, 305, 411 et	428
DUMONT (F.), professeur au Lycée Fontanes.....	430
ERATOSTHÈNES.....	474
EUCLIDE.....	366
ESCARY, professeur au Lycée de Tarbes..... 190, 227 et	381
ESTIENNE (E.), élève du Lycée de Bar-le-Duc.....	35
EULER..... 131, 191, 289 et	375
EVESQUE, élève de la Faculté des Sciences de Montpellier.....	229



	Pages.
MBERGUE (E.), maître répétiteur au Lycée de Saint-	
n.... 35, 55, 171, 182, 183, 231, 281, 288, 348, 416, 420,	
471, 518 et	524
H.), chef d'escadron d'Artillerie.....	143 et 338
(ANTONIO) .....	185
.....	191 et 258
ICI.....	187
(G.), répétiteur à l'École Polytechnique. ....	191
.....	199
ND (L.), boursier à la Faculté des Sciences de Bordeaux.	288
ancien élève du Lycée de Reims. ....	48 et 184
, professeur au Lycée de Saint-Étienne.....	273
.....	271
.....	113
MARTIN (l'abbé A.).....	182, 240 et 459
(R.-W.).....	175
(A.), élève du Lycée de Grenoble.....	178
ingénieur des Ponts et Chaussées. 176, 179, 183, 340,	
342, 368, 372, 382, 383, 414 et	480
, rédacteur.....	432, 467 et 526
(PH.), professeur à l'Université de Louvain....	189 et 368
(DÉSIRÉ), élève du Lycée de Grenoble .....	184
T (N.).....	179, 427, 428, 522, 523 et 524
(J.), maître répétiteur au Lycée d'Alger.....	20, 27 et 120
(ED.), maître répétiteur au Lycée de Lyon.....	427
Γ, professeur de Mathématiques spéciales au Collège Rollin	17
(E.-J.), à Lima.....	96
OURT (E.), inspecteur honoraire de l'Université. 265,	
266 et	270
DE LA GOUPILLIÈRE, professeur à l'École des Mines.	
.....	113 et 189
répétiteur à Bordeaux.....	144
(C.).....	5, 191, 213 et 418
(H.), du Lycée de Rouen.....	179, 238 et 428
E (CH.), membre de l'Institut.....	448
.....	131
(A.), professeur au Lycée de Douai.....	14 et 327
(V.).....	276
ELLING).....	186 et 187
RT (G.).....	192
Y (E.), professeur à l'École Polytechnique de Budapest.	53
LBERT), élève du Lycée de Nancy.....	131
SKI (E.), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée	
ançon.....	241
.....	216 et 219
V.), professeur au Lycée de Nice.....	271, 344, 385 et 434

JOACHIMSTAHL.....		
JONQUIÈRES (l'amiral DE).....		
JOSSE (F.), élève du Lycée de Nancy.....	300	
JULLIARD (L.), élève du Lycée de Rouen.....	281	
KOENIGS (G.), élève de l'École Normale supérieure.....	11	
KORALEK.....	474, 475, 477 et	479
KRANTZ (H.-J.), professeur à Bréda.....	281	
LACOMBE, à Bar-sur-Seine.....	281	
LACOUR, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Nancy.....	380	
LAGRANGE.....	49, 50, 51, 405, 485 et	486
LAGUERRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique,	112, 178 et	520
LAISANT (A.), député de la Loire-Inférieure. 94, 95, 138, 185,	190, 281 et	383
LAMBIOTTE (G.), élève de l'École polytechnique de Bruxelles.	182	
LAMÉ.....	253 et	256
LANNES, élève du Lycée de Tarbes.....	227 et	229
LAPLACE.....	216	
LAUDIERO (FRANÇOIS), élève de l'Université de Naples.....	17	
LAURENT (H.), répétiteur à l'École Polytechnique. 38, 185 et	19	
LEBLOND, élève du Lycée du Havre.....	52	
LEBON (ERNEST), professeur au Lycée Charlemagne. 133, 186,	240 et	33
LEBRETON (F.), élève du Lycée de Besançon.....	3	
LEBRUN (LÉONCE), élève au Prytanée militaire de La Flèche.....	1	
LEGENDRE.....	410 et	48
LEGOUX (A.), professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble,	326 et	4
LEINEKUGEL (A.), étudiant. 27, 35, 73, 127, 178, 307, 314, 350,	373, 374 et	4
LETNIKOW (D <sup>r</sup> A.), professeur à l'École impériale technique de Moscou.....		89
LÉVY (LUCIEN), professeur au Lycée Louis-le-Grand.....		24
LEZ (H.).....	73, 127, 182, 183, 238, 288, 310, 373, 380 et	28
LINDEMANN (FERDINAND), professeur à l'Université de Fribourg...		95,
LIONNET.....	373, 375, 425, 431, 474, 476, 477, 478, 480 et	514
LIUVILLE (J.), membre de l'Institut.....	216 et	306
LISSENÇON (J.), ancien élève de l'École Polytechnique..	374 et	427
LONGCHAMPS (G. DE), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne.....	94, 190 et	382
LUCAS (ÉDOUARD), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.....	9, 150, 153, 175, 201, 330 et	367
MACÉ DE LÉPINAY (A.), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Henri IV.....		282
MACLAURIN.....	49, 50 et	51

	Pages.
<b>MALEBRANCHE</b> .....	191
<b>MANDRILLON (L.)</b> , élève du Lycée de Besançon.....	35
<b>MANNHEIM (A.)</b> , professeur à l'École Polytechnique.....	192 et 197
<b>MANSION (P.)</b> , professeur à l'Université de Gand.....	143 et 327
<b>MARCHAL (J.)</b> .....	179
<b>MARCHAND (l'abbé)</b> , curé de Pontoise.....	140
<b>MASCART (E.)</b> , professeur au Collège de France.....	367
<b>MENTION</b> .....	328
<b>MICHAUX (CARLOS)</b> , élève du Lycée de Douai.....	17
<b>MONGE</b> .....	145 et 327
<b>MONTEL (DU)</b> , élève du Lycée Saint-Louis.....	379
<b>MONTESANO (DOMENICO)</b> .....	527
<b>MONTESQUIEU</b> .....	368
<b>MORET-BLANC</b> , professeur de Mathématiques spéciales au Lycée du Havre. 20, 65, 150, 177, 179, 182, 201, 253, 281, 288, 314, 315, 319, 330, 333, 336, 372, 374, 375, 380, 427, 428, 430, 431, 432 518, 520 et	526
<b>MOUREAUX (TH.)</b> , météorologiste au Bureau central.....	367
<b>NETTER (J.)</b> , élève du Lycée de Nancy.....	182
<b>OCAGNE (MAURICE D')</b> , élève de l'École Polytechnique. 197, 201, 456 et	506
<b>ORLOW (G.-A.)</b> , professeur à l'École de construction de Saint-Petersbourg.....	481
<b>OVIDIO (E. D')</b> .....	187 et 188
<b>PAINVIN</b> .....	271
<b>PAPPUS</b> .....	337 et 433
<b>PARMENTIER (général)</b> .....	140 et 192
<b>PASCAL</b> .....	160, 165, 166, 167, 168, 170 et 171
<b>PAUT</b> , boursier d'agrégation.....	528
<b>PEAUCELLIER</b> , lieutenant-colonel du Génie.....	456
<b>PECQUERY (E.)</b> , élève du Lycée du Havre.. 179, 184, 288, 376 et	428
<b>PELL</b> .....	189
<b>PELLET (A.-E.)</b> .....	190, 380, 444 et 528
<b>PERRET (J.)</b> , élève du Lycée de Grenoble.....	428
<b>PERRIN (ÉLIE)</b> , élève de la Faculté des sciences de Paris.....	380
<b>PICART (A.)</b> .....	113, 145, 216 et 326
<b>PICQUET (H.)</b> , répétiteur à l'École Polytechnique.....	191
<b>PISANI (F.)</b> , professeur à l'Institut technique de Messine 179, 184, 328, 336, 373, 380, 427, 428 et	522
<b>PINSOT</b> .....	272
<b>POMEY (J.-B.)</b> , élève de l'École Polytechnique.....	131
<b>PONCELET</b> .....	186
<b>POUJADE</b> .....	321 et 322
<b>PUVOST</b> , inspecteur de l'Académie de Paris.....	322
<b>RAVALIS (S.)</b> , ingénieur à Turin. 173, 177, 189, 335, 377, 408, 501, 526 et	527

	Pages.
RESAL (H.), membre de l'Institut.....	337, 433 et 529
REYNAUD (J.-V.).....	186
ROBERT (L.), à Montreuil (Seine).....	183
ROBERTS (SAMUEL).....	187
ROCHETTI (MARCELLO), professeur au Lycée Campanella, à Reggio (Calabre).....	143, 178, 336, 374 et 425
ROLLE.....	132, 133, 193 et 356
RUCHONNET (CHARLES), de Lausanne.....	95
SALMON (G).....	271 et 372
SALTEL (L.), maître de conférences à la Faculté des sciences de Bordeaux.....	190 et 546
SHELL (A.).....	367
SCHOLTZ (Dr AUGUSTE), à Budapest.....	220
SCHOUTE.....	398 et 399
SCHROEN.....	240
SERRET (J.-A.), membre de l'Institut.....	185
SERRET (P.).....	328
STEINER.....	328
STURM.....	193, 194, 195, 196, 231 et 356
STURM (RUDOLPH).....	398
SYLVESTER (J.-J.).....	96, 174, 175 et 366
TANNERY (PAUL).....	189
TAYLOR.....	61
TERQUEM.....	474
TERRIER (PAUL).....	185
THALÈS (de Milet).....	189 et 366
VAUVINEUX (A. DE), élève du Lycée de Grenoble.....	288
VIELLE, élève du Lycée du Havre.....	524
VINTÉJOUX (F.), professeur au Lycée Saint-Louis.....	186
WEILL, professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal, .....	73, 110, 142, 143, 160, 327 et 498
WHITWORTH (W.-A.).....	527
ZAHRADNICK.....	138
ZEUTHEN (H.-G.).....	186



11









